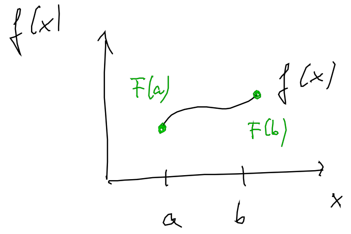
5. Integralsätze in höheren Dimensionen, Potentiale

typische Form $\qquad \int$ über Ableitungen = Funktionswerte auf Gebietsrand

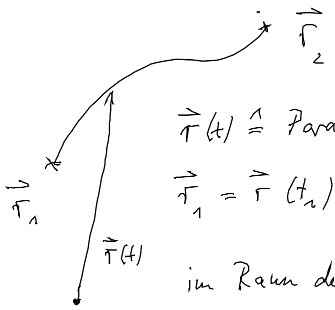
Gebiet: G $\qquad\qquad\qquad\qquad \partial G$

bekannt: $$\underbrace{\int_a^b}_{\text{Gebiet}} dx \; \underline{\underline{f(x)}} = \int_a^b dx \; \underline{\underline{\frac{dF(x)}{dx}}} = \underbrace{F(b) - F(a)}_{\text{Rand}}$$



5.1. Integralsätze im Raum

a) Integralsatz f. Kurve $\quad$ (1d parametrisiertes Objekt in 3d Raum)



$\vec{r}(t) \;\hat{=}\;$ Parametrisierung über t

$\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$, $\quad \vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$

im Raum definierte Funktion $\phi(\vec{r})$

$$\underline{\text{betrachte:}} \quad \int_{t_1}^{t_2} dt \; \frac{d}{dt} \phi(\vec{r}(t)) \nearrow = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\phi(\vec{r}) = \underline{\phi(\vec{r}_2) - \phi(\vec{r}_1)}$$

$$\searrow \underbrace{}_{\text{2 Mgl.}} = \int_{t_1}^{t_2} dt \; \vec{\nabla}\phi(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)$$

$$= \int^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\phi(\vec{r})$$

$$\phi(\vec r_2) - \phi(\vec r_1) = \int_{\vec r_1}^{\vec r_2} d\vec r \cdot \vec\nabla \phi(\vec r) \qquad \text{Integralsatz f. Kurve}$$

$$\underbrace{\phi(\vec r_2) - \phi(\vec r_1)}_{\text{spezielle Funktionswerte auf Rand } (\vec r_1, \vec r_2)} \qquad \underbrace{\int_{\vec r_1}^{\vec r_2} d\vec r \cdot \vec\nabla \phi(\vec r)}_{\text{Gebietsintegral (Kurve)}}$$

Folgerung: wenn $\vec f = -\vec\nabla \phi(\vec r)$, so „$\phi$ ist Potential von $\vec f$"

Konvention

„$\vec f$ ist Potentialfeld"

$$\int_{\vec r_1}^{\vec r_2} d\vec r \cdot \vec f(\vec r) = \phi(\vec r_1) - \phi(\vec r_2)$$

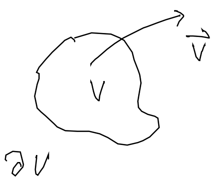
Wegintegrale in Potentialfeldern sind durch Anfangs- und Endpunkt bestimmt (eindeutig).

Integral identisch $\forall$ Wege

b) Verallgemeinerung auf Flächen und Volumina

Vorwegnahme zweier Integralsätze

i) Satz von Gauß



Volumen V
Oberfläche ∂V
Vektorfeld $\vec v$

geschlossene Oberfläche

$$\int_V dV\, \vec\nabla \cdot \vec v(\vec r) = \oint_{\partial V} d\vec A \cdot \vec v(\vec r)$$

Beispiel $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$ Ladungsdichte

elektr. Feld

eine der Quellgleichungen d. Maxwellfelds

Integral über V: $\vec{v} \to \vec{E}$

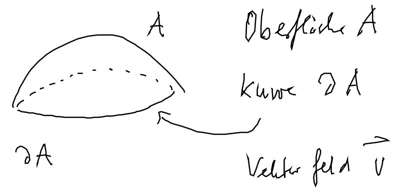
$$\int dV \, \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \int dV \, \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Q = Gesamtladung im Volumen V

$$\underbrace{\oint d\vec{A} \cdot \vec{E}}_{} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Aufsammeln d. Feldlinien durch ∂V $\hat{=}$ Summe d. Ladungen

ii) Satz v. Stokes



geschlossene Kurve

$$\int_A d\vec{A} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v}(\vec{r}) = \oint_{\partial A} d\vec{r} \cdot \vec{v}(\vec{r})$$

Beispiel: $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}(\vec{r})$ Stromdichte

Magnetfeld

Spezialfall: Magnetostatik der Maxwellgleichungen

$$\underbrace{\int d\vec{A} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B}}_{} = \mu_0 \underbrace{\int d\vec{A} \cdot \vec{j}(\vec{r})}_{}$$

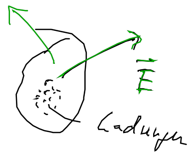
Gesamtstrom durch Fläche

$$\oint_{\partial A} d\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \, I$$

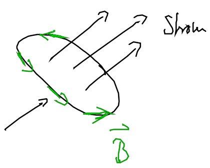
$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{Aufsummieren d. Feldlinien entlang Kurve}} \;\hat{=}\;$ Gesamtstrom d. Oberfläche

physikalische Interpretation:

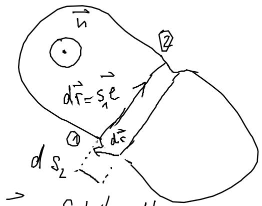
i) Quellen d. elektrischen Felds sind Ladungen und bestimmen Fluß d. einschließenden Oberfläche



ii) Wirbel d. magnetischen Felds werden durch Stromfluß erzeugt und sind durch geschlossenes Wegintegral bestimmt.



plausibel machen d. Integralsätze:



$\vec e$: Einheitsvektor in Ebene entlang s_1

Fläche in Ebene, Normalenvektor $\vec n$, Funktion $\phi(\vec r)$

Einteilung in Streifen Länge ds_i: s_1, s_2

Umlauf um Streifen $\vec r(t)$ mit $d\vec r$

$$\phi(\vec r_2) - \phi(\vec r_1) = \int_{\vec r_1\ (1)}^{\vec r_2\ (2)} d\vec r \cdot \vec\nabla \phi(\vec r) = \int \underbrace{ds_1 \vec e}_{d\vec r} \cdot \vec\nabla \phi(\vec r)$$

entlang festem Vektor $\vec e$

wollen über alle Flächenstücke integrieren:

$$ds_2 = \underbrace{(\vec n \times \vec e)}_{\text{Einheitsvektor in Ebene}} \cdot \underbrace{d\vec r}_{\text{Projektion auf } d\vec r} = \vec e \cdot (d\vec r \times \vec n) \qquad \text{(Spatprodukt zyklisch)}$$

$$\vec e \cdot d\vec r \times \vec n \left(\phi(\vec r_2) - \phi(\vec r_1) \right) = \vec e \cdot \underbrace{ds_2 \int ds_1}_{dA = ds_1 ds_2} \vec\nabla \phi(\vec r)$$

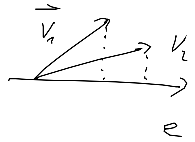
$$\vec e \cdot \oint_{\partial A} d\vec r \times \vec n \; \phi(\vec r) = \vec e \cdot \int_A dA \; \vec\nabla \phi(\vec r)$$

$$\underbrace{\vec e}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\left(\oint_{\partial A:\ \text{über Rand}} d\vec r \times \vec n \; \phi(\vec r) - \int_{A:\ \text{ganze Fläche}} dA \; \vec\nabla \phi(\vec r) \right)}_{} = 0$$

$= 0$, wenn Zahl wäre

aber i.a. $\neq 0$ weil Projektion an $\vec e$

$\vec e \cdot (\vec v_1 - \vec v_2)$



→ man muß sich vorstellen, daß Projektionen in der Formel erscheinen

1. Bsp: beliebig viele Flächen übereinanderlegen um ein Volumen zu erzeugen:

V mit Oberfläche A

$$\vec e \cdot \underbrace{\int ds_3 \oint d\vec r \times \vec n}_{d\vec A} \phi(\vec r) = \vec e \cdot \underbrace{\int ds_3 \int dA}_{\int dV} \vec\nabla \phi(\vec r)$$

$$\Downarrow \quad \vec e \cdot \left(\int_{\partial V} d\vec A \; \phi(\vec r) - \int_V dV \; \vec\nabla \phi(\vec r) \right) = 0$$

$\vec e$ kann jetzt in V beliebig gewählt werden (anderer Schnitt)

$(\quad) = 0 \quad \Downarrow$

$$\int_{\partial V} d\vec{A}\, \phi(\vec{r}) = \int_V dV\, \vec{\nabla}\, \phi(\vec{r})$$

ϕ noch nicht spezifiziert: kann auch Vektorkomponente ϕ_i sein

Operatoridentität:

$$\boxed{\int_{\partial V} d\vec{A}\, \circ = \int_V dV\, \vec{\nabla}\, \circ}$$

darf irgendetwas sein: ϕ, $\vec{v}$, $\times \vec{v}$

Bsp. Satz von Gauß, wähle $\circ \mathrel{\hat{=}} \cdot \vec{v}$

$$\int dV\, \vec{\nabla}\cdot\vec{v}(\vec{r}) = \oint_{\partial V} d\vec{A}\cdot\vec{v}(\vec{r})$$

2. Bsp: ohne Beweis:

$$\boxed{\int_A d\vec{A}\times\vec{\nabla}\, \circ = \oint_{\partial A} d\vec{r}\, \circ}$$

ergibt Satz v. Stokes (u.a.)

Beweis über Konstruktion der Projektion auf $\vec{e}$.

5.2. Darstellung spezieller Vektorfelder über Potentiale

gilt f. einfach zusammenhängende Gebiete (Mathe)

a) wenn $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$, so $\vec{v} = -\vec{\nabla} \phi$

ein wirbelfreies Feld kann als Gradient eines anderen Felds ϕ dargestellt werden, ϕ heißt Potential, $\vec{v}$ heißt Potentialfeld

<u>warum:</u> wenn $\vec{v} \sim \vec{\nabla} \phi \rightleftarrows \vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$

denn $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = 0$ bzw rot grad $\cdot = 0$

ϕ ist bis auf Konstante bestimmt

b) wenn $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$, so $\vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

ein quellfreies Feld kann als Wirbeldichte eines and Felds $\vec{A}$ dargestellt werden, $\vec{A}$ heißt Vektorpotential

<u>warum:</u> wenn $\vec{v} \sim \vec{\nabla} \times \vec{A} \rightleftarrows \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$

denn $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$ bzw div rot $\cdot = 0$