

Mathematische Methoden Do 8¹⁵ - 9⁴⁵

Andreas Knorr EW 742 Sprechstunde 13-14, Die

Ziel der Vorlesung

- Abkürzung zur Welt der physikalischen Gleichungen

Bsp $(i\hbar \vec{\nabla} - cm) \vec{\psi}(\vec{r}, t) = 0$ Diracgleichung

Vektoren $\vec{\psi}$, Tensoren $\vec{\nabla}$, Ableitungen ∂ , Felder $\vec{\psi}(\vec{r}, t)$ für:

- Newton Gleichung (v) \rightarrow Verallgemeinerung zu spezieller Relativität
- Maxwell Gleichungen (Elektrodynamik)
- Schrödinger Gleichung (Quantenmechanik)

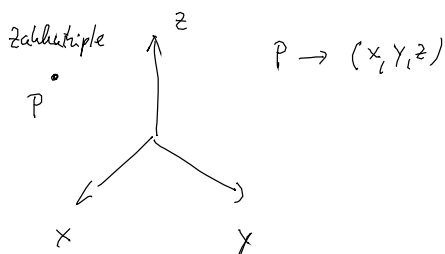
- wichtig f. Newton Gleichungen: Vorleserkraft!

1. Mathematisierung physikalischer Gesetze: Koordinatensysteme, Symmetrien, Vektoren, Regeln

1.1. Symmetrien

Verknüpfung: Ort, Zeit, Messgrößen (gerichtet)

Darstellung im Koordinatensystem

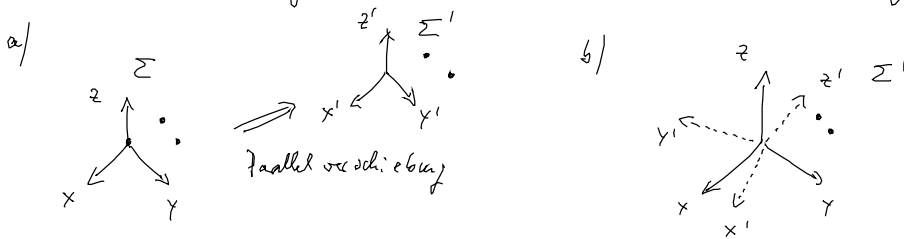


Frage: wo Ursprung
Achsenorientierung

Antwort: physikal. Gesetze müssen unabh.
von KS $\Sigma(x_i, y_i, z_i)$ sein

Symmetrie "Gesetze sollen invariant (symmetrisch) bzgl. der

Verdrückung ell. Objekte mit den KS und Drehung d. KS "



(Symmetrietransf. nach Weyl)

Bsp: $\cos(x)$, Trafo: $x \rightarrow -x \Rightarrow \cos(x) = \cos(-x)$ S-Trafo
 $x \rightarrow ax \Rightarrow \cos(ax) \neq \cos(x)$ keine S-Trafo

Symmetrietransf. f. Newtongleichung

Notation: $x = x_1, y = x_2, z = x_3$ (alternativ)

$$\frac{d}{dt} (m \dot{x}_i) = f_i$$

$x_i(t)$: Bahnkurve

f_i : i-te Kraftkomponente
 $m(t)$: Masse

a) Verdrückung $\Sigma \rightarrow \Sigma'$: $x_i \rightarrow x'_i = x_i + c_i$
 ↑
 konstante Verschiebung

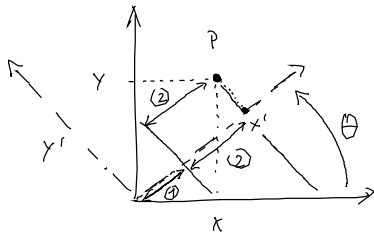
$$\frac{d}{dt} (m(\dot{x}'_i - \dot{c}_i)) = f_i \quad \left(\begin{array}{l} \text{hängt von Abstand} \\ \text{zu and. Massept. ab} \end{array} \right)$$

$$\dot{c}_i = 0$$

$$\frac{d}{dt} (m \dot{x}'_i) = f'_i \quad \leftarrow$$

→ Newtongleichung ist symmetrisch bzgl. Verschiebung

b) Drehung : um z-Achse : $\Sigma \rightarrow \Sigma'$ um $\neq 0$



$$x' = \textcircled{1} + \textcircled{2}$$

$$x' = x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta$$

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

$$z' = z$$

$$\text{Später: Drehmatrix: } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Kräfte transformieren sich analog:

$$f_x' = \cos \theta f_x + \sin \theta f_y$$

$$f_y' = -\sin \theta f_x + \cos \theta f_y$$

$$f_z' = f_z$$

prüfe ob Kraftgl. in Σ und Σ' identisch ist:

$$\frac{d}{dt}(m \dot{x}_i) = f_i \stackrel{?}{\rightarrow} \frac{d}{dt}(m \dot{x}_i') = f_i'$$

Lösung: x_1 gleich, mit $\cos \theta$ multipl. und x_2 mit $\sin \theta$ multiplizieren, beides addieren

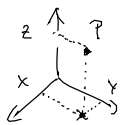
$$\text{dann folgt } \frac{d}{dt}(m \dot{x}_1') = f_1' \quad : \text{ mgl. \# Konstante}$$

fordern abh. v. Naturgesetzen Symmetrie gegen Vertauschung und Drehung

\rightarrow Vektorformulierung d. Naturgesetze

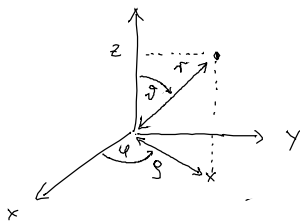
Koordinatensysteme:

kartesisch



(x, y, z)

kugelmäßig:



Zylinderkoordinat: (ρ, φ, z)

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

$$z = z$$

Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ)

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \vartheta$$

f. allgemein physikal. Größe: (a_x, a_y, a_z)

1.2. Vektoren

Um Symmetrien (a,b) zu gewährleisten werden Notationen mit Vektoren formuliert

Vektor geometrisch Objekt mit Länge und Richtung \vec{a}

Darstellg. im KS: Zahlen triplet, bezogen auf Ursprung

Eiheitskomponenten: $a_i := (a_1, a_2, a_3)$

Forderung: Komponenten a_i transformieren sich bei $\Sigma \rightarrow \Sigma'$, $a_i \rightarrow a'_i$ so, daß Parallelverschiebung und Drehung des geometrischen Objekts unverändert lassen

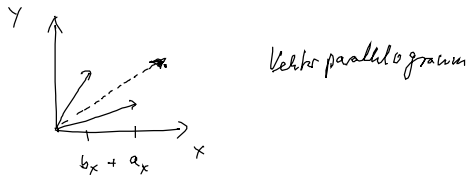
Folge: Vektoren sind frei parallel verschiebbar

Zahlen triplet $(x, y, z) \rightarrow \vec{r}$ als koordinat unabhängige Formulierung.

$$\frac{d}{dt} (m(t) \dot{\vec{r}}(t)) = \vec{f}(\vec{r}, t)$$

1.3. Rechn mit Vektoren I: Summ, Differenz, Ableitung

a) Addition $\vec{a} + \vec{b} \equiv (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$

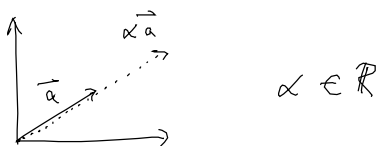


Frage: Ist \vec{c} ein Vektor? Ja, denn Produkte $\Sigma \rightarrow \Sigma'$ sind lineare Abbildungen und Summ sind wieder Vektoren: $(a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z) \rightarrow (a'_x + b'_x, a'_y + b'_y, a'_z + b'_z)$

$\Sigma \longrightarrow \Sigma'$

b) Multiplikation mit Zahl α

$\alpha \vec{a} = (\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z)$

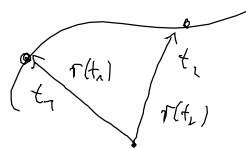


c) Subtraktion: $\alpha = -1 \Rightarrow \vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ ist bildbar
 $\vec{b} \rightarrow \alpha \vec{b}$

d) Ableitung nach Parameter

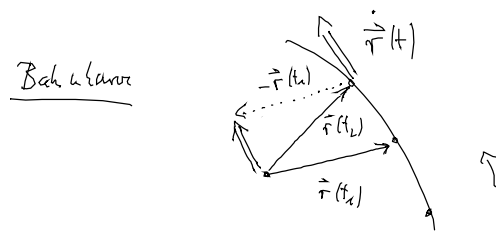
$\vec{a}(t) = (a_x(t), a_y(t), a_z(t))$ f. $\vec{r}(t)$: Bahnkurve
 ↑
 Parameter

Ableitung: $\frac{d\vec{a}}{dt} \equiv \frac{\vec{a}(t_2) - \vec{a}(t_1)}{t_2 - t_1} \Big|_{\Delta t \rightarrow 0}$
 $(t_2 = t_1 + \Delta t)$



→ komponentenweise Ableiten:

$$\dot{\vec{a}} = (\dot{a}_x, \dot{a}_y, \dot{a}_z) \quad \text{festwirdigkeit d. Vektors } \vec{a}$$



Jed $\dot{\vec{r}}$ ein Vektor.