Mathematische Methoden Do $8^{15} - 9^{45}$

Andreas Knorr EW 742 Sprechstunde 13-14, Die

Ziel der Vorlesung

- Abkürzung zur Welt der physikalischen Gleichungen

Bsp $\left(i\hbar \overleftrightarrow{\cancel{\partial}} - cm\right) \vec{\Psi}(\vec{r}, t) = 0$ Diracgleichung

Vektoren $\vec{\Psi}$, Tensoren $\overleftrightarrow{\cancel{\partial}}$, Ableitungen ∂, Felder $\vec{\Psi}(\vec{r}, t)$ für:

- Newtongleichung (V) $\longrightarrow$ Verallgemeinerung zu spezieller Relativität
- Maxwellgleichungen (Elektrodynamik)
- Schrödingergleichung (Quantenmechanik)

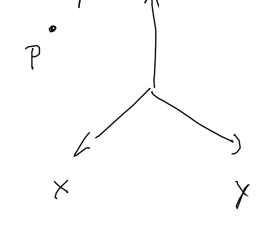
- wichtig f. Neuentwicklungen: Vorhersagekraft!

1. Mathematisierung physikalischer Gesetze: Koordinatensysteme, Symmetrien, Vektoren, Rechenregeln

1.1. Symmetrien

Verknüpfung: Ort, Zeit, Messgrößen (gerichtet)

Darstellung im Koordinatensystem



$P \rightarrow (x, y, z)$

Frage: wo Ursprung

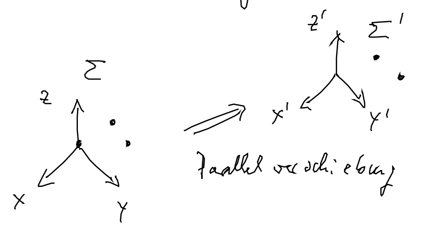
Achsenorientierung

Antwort: physikal. Gesetze müssen unabh. von KS $\Sigma(x, y, z)$ sein

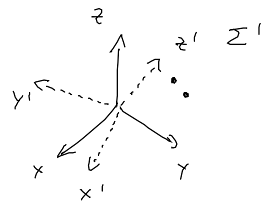
Sprechweise „Gesetze sollen invariant (symmetrisch) bzgl. der

„Verschiebung alle Objekte mit dem KS und Drehung d. KS"

a/



b/



(Symmetrietrafo nach Weyl)

Bsp: $\cos(x)$, Trafo: $x \to -x$ $\Longrightarrow$ $\cos(x) = \cos(-x)$ S-Trafo

$x \to ax$ $\qquad \cos(ax) \neq \cos(x)$ Keine S-Trafo

Symmetrietrafo f. Newtongleichung

Notation: $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$ (alternativ)

$$\frac{d}{dt}\left(m(t)\,\dot{x}_i\right) = f_i$$

$x_i(t)$: Bahnkurve

„i" Komponente : f_i i-te Kraftkomponente

$m(t)$: Masse

a) Verschiebung $\quad \Sigma \to \Sigma' \; : \; x_i \to x_i' = x_i + c_i$

konstante Verschiebung

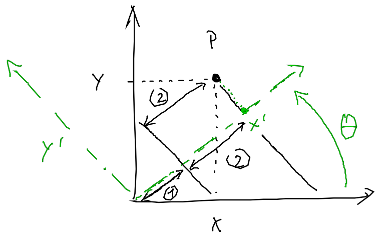
$\dot{c}_i = 0$

$$\frac{d}{dt}\left(m(\dot{x}_i' - \dot{c}_i)\right) = f_i$$ (hängt nur vom Abstand zu and. Massepkt. ab)

$$\frac{d}{dt}\left(m(t)\,\dot{x}_i'\right) = f_i'$$

$\longrightarrow$ Newtongleichung ist symmetrisch bzg. Verschiebung

b) Drehung : um z Achse : $\Sigma \to \Sigma'$ um $\measuredangle\ \theta$



$$x' = ① + ②$$

$$x' = x \cdot \cos\theta + y \cdot \sin\theta$$

$$y' = -x \sin\theta + y \cos\theta$$

$$z' = z$$

Später: Drehmatrix: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Kräfte transformieren sich analog:

$$f_x' = \cos\theta\, f_x + \sin\theta\, f_y$$

$$f_y' = -\sin\theta\, f_x + \cos\theta\, f_y$$

$$f_z' = f_z$$

prüfe ob Newton gl. in Σ und Σ' identisch ist:

$$\frac{d}{dt}(m \dot{x}_i) = f_i \quad \overset{?}{\longrightarrow} \quad \frac{d}{dt}(m \dot{x}_i') = f_i'$$

<u>Idee:</u> x_1 Gleichung mit $\cos\theta$ multipl. und x_2 mit $\sin\theta$ multiplizieren, beide addieren

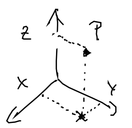
dann folgt $\frac{d}{dt}(m \dot{x}_1') = f_1'$: analog. # Komponente

fordern objektiv. Naturgesetzen Symmetrie gegen Verschiebung und Drehung

→ Vektorformulierung d. Naturgesetze

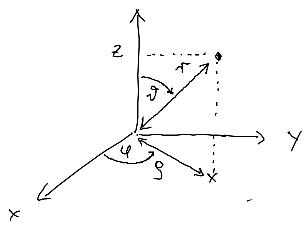
<u>Koordinatensysteme:</u>

kartesisch



(x, y, z)

krummlinig:



Zylinderkoordinaten: (ρ, φ, z)

$$x = \rho \cos\varphi$$
$$y = \rho \sin\varphi$$
$$z = z$$

Kugelkoordinaten (r, φ, ϑ)

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi$$
$$y = r \sin\vartheta \sin\varphi$$
$$z = r \cos\vartheta$$

f. allgemein physikal. Größe: (a_x, a_y, a_z)

1.2. Vektoren

um Symmetrien (a,b) zu gewährleisten werden Naturgesetze mit Vektoren formuliert

Vektor geometrisches Objekt mit Länge und Richtung „$\vec{a}$"

Darstellg. im KS: Zahlentripel, bezogen auf Ursprung
Einträge heißen Komponenten: $a_i := (a_1, a_2, a_3)$

Forderung: Komponente a_i transformieren sich bei $\Sigma \to \Sigma'$, $a_i \to a_i'$ so, daß Parallelverschiebg. und Drehungen das geometrische Objekt unverändert lassen

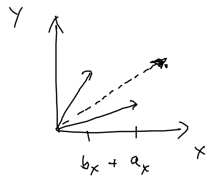
Folge: Vektoren sind frei parallelverschiebbar

Zahlentripel $(x, y, z) \to \vec{r}$ als koordinatenunabhängige Formulierg.

$$\frac{d}{dt}\left(m(t)\,\dot{\vec{r}}(t)\right) = \vec{f}(\vec{r}, t)$$

1.3. Rechnen mit Vektoren I: Summe, Differenz, Ableitung

a) Addition $\vec{a} + \vec{b} \equiv (a_x + b_x \,,\, a_y + b_y \,;\, a_z + b_z)$



Vektorparallelogramm

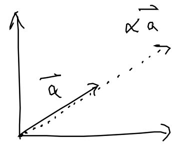
Frage: Ist $\vec{c}$ ein Vektor? Ja, denn Drehungen $\Sigma \to \Sigma'$ sind lineare Abbildungen

und Summe sind wieder Vektoren: $(a_x + b_x \,,\, a_y + b_y \,,\, a_z + b_z) \to (a_x' + b_x' \,,\, a_y' + b_y' \,,\, a_z' + b_z')$

$$\Sigma \longrightarrow \Sigma'$$

b) Multiplikation mit Zahl α

$$\alpha \vec{a} = (\alpha a_x \,,\, \alpha a_y \,,\, \alpha a_z)$$



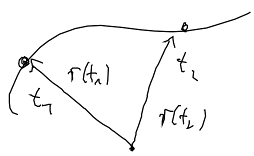
$\alpha \in \mathbb{R}$

c) Subtraktion: $\alpha = -1$, $\vec{b} \to \alpha \vec{b}$ $\curvearrowright$ $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ ist bildbar

d) Ableitung nach Parameter

$\vec{a}(t) = (a_x(t) \,,\, a_y(t) \,,\, a_z(t))$ — Parameter

z.B. $\vec{r}(t)$: Bahnkurve



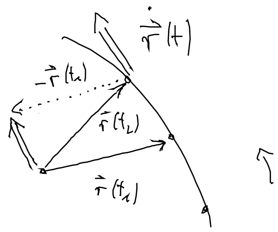
Ableitung: $\dfrac{d\vec{a}}{dt} \equiv \left. \dfrac{\vec{a}(t_2) - \vec{a}(t_1)}{t_2 - t_1} \right|_{\Delta t \to 0}$

$(t_2 = t_1 + \Delta t)$

→ komponentweises Ableiten:

$$\dot{\vec{a}} = (\dot{a}_x, \dot{a}_y, \dot{a}_z) \qquad \text{Geschwindigkeit d. Vektors } \vec{a}$$

<u>Bahnkurve</u>



Ist $\dot{\vec{r}}$ ein Vektor.