7. gewöhnliche Differentialgleichungen

Vorbetrachtung: Gesetze der Physik – Form von Differentialgl.

Sprechweise: „Bewegungsgleichungen" – beschreiben im allgemeinen Zeitablauf im Raum

Beispiele

I Newtonsche Bewegungsgleichung $\frac{d}{dt}\vec{p}(t) = \vec{f}(\vec{r},t)$, $\vec{p}(t) = m(\dot{\vec{r}})\dot{\vec{r}}$

II Schrödingergleichung $i\hbar\partial_t \Psi(\vec{r},t) = \hat{H}\Psi(\vec{r},t)$

III Maxwellgleichungen $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$, $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B}$, ...

IV Liouville-Gleichung / von Neumanngleichg.

$$i\hbar\dot{\hat{\rho}} = [\hat{H}, \hat{\rho}]$$

Zoo von Differentialgleichungen:

⇒ Klassifizierung:

Dgl. → gewöhnliche: ∃ lediglich Ableitungen nach 1 Variable, z.B. Zeit t

Dgl. → partielle: ∃ Ableitungen nach mehreren Variablen z.B., Zeit t, Ort x, y, z

Dgl. → linear: gesuchte Funktion $X(t)$ von Variable erscheint nur linear: $X(t), \dot{X}(t), \ddot{X}(t)$ ...

Dgl. → nichtlinear: – " – – " – nichtlinear: $X^3(t)$, $\sin X(t)$

Dgl: → vektoriell $\vec{E}$

→ skalar Ψ

→ tensoriell F_{ij} (elektromagn. Feldtensor)

→ operatorwertig $\hat{\rho}$

7.1. Klassifizierung gewöhnlicher Differentialgleichungen

Funktion $x = x(t)$, t : z.B Zeit $\hat{=}$ Zeitdynamik einer Größe $x(t)$

Begriffe

- Ordnung der Dgl. ist n wenn n die höchste Ableitg. kennzeichnet
  $\dot{x}, \ddot{x} \ldots x^{(n)}$ $\qquad \ddot{x} = -\omega_0^2 x \rightarrow$ zweite Ordng.

- linear : $\exists$ nur 1. Potenz v. $x, \dot{x}, \ldots x^{(i)} \ldots,$ in der Dgl

- explizit : nach höchster Ableitg. $x^{(n)}$ umgestellt $x^{(n)} = g(x, \dot{x} \ldots)$

- homogen (inhomogen) : in Dgl. liegen nur $x, \dot{x} \ldots x^{(n)}$ vor aber
  keine explizite Zeitfunktion,
  (explizite Zeitfunktion liegt vor)

  Bsp. $$\underbrace{\underbrace{\ddot{x} = -\omega_0^2 x}_{\text{homogen}} + \underbrace{G(t)}_{\text{„Inhomogenität"}}}_{\text{inhomogen}}$$

- Gleichungen mit Ableitungen höherer Ordnung, $n > 1$ können auf ein
  System (viele) von Dgl. umgeschrieben werden

  $\dot{x} = y_1$, $\ldots$ $x^{(i)} = y_i$ $\ldots$, $x^{(n)} = \dot{y}_{n-1}$

Bsp: $\ddot{x} + f_1 \dot{x} + f_0 x = f$ $\qquad f_1, f_2, f_0$ sind u.U. Fktion der Zeit

$$\left.\begin{array}{l} x \to x \\ \dot{x} \to y_1 \\ \ddot{x} \to \dot{y}_1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \dot{y}_1 + f_1 y_1 + f_0 x = f \\ \dot{x} = y_1 \end{array}\right\}$$

aus 2. Ordng hat man verkoppeltes System von 2 Dgl. 1. Ordng. gemacht

– Schreibweise f. gewöhnliche, explizite, lineare Dgl:

$$\underbrace{x^{(n)}(t) + f_{n-1}(t)\, x^{(n-1)}(t) \cdots f_i(t)\, x^{(i)}(t) \cdots f_0(t)\, x(t)}_{\mathcal{L}_n\, x(t)} = \underbrace{f(t)}_{\text{Inhomogenität}}$$

7.2. Lineare Differentialgleichungen

4 grundlegende Tatsachen:

(i) $\mathcal{L}_n x(t) = 0$ besitzt n linear unabhängige Lösungen $\underbrace{\{x_1 .. x_i .. x_n\}}_{\text{„Fundamentalsystem"}}$

$\left(\sum_n c_n x_n(t) = 0 \quad \Leftarrow \quad c_n = 0\right)$

(ii) $\mathcal{L}_n x(t) = 0$ jede Lösung $x(t)$ kann als Überlagerung von $\{x_i\}$ geschrieben werden: $x_h(t) = \sum_i c_i x_i(t)$

homogen „h"

homogene Dgl.-Lösung

(iii) $\mathcal{L}_n x(t) = f(t)$ wird durch $x_{inh} = x_h(t) + x_0(t)$

inhomogen „inh"

wobei $x_0(t)$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Dgl. ist

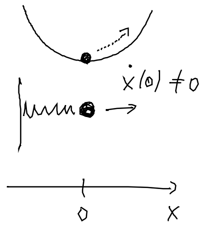
(iv) Die konstanten Parameter c_i müssen durch Anfangs- bzw Randbedingungen festgelegt werden

Beispiel f. Festlegung v. Parametern c_i:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x \quad \text{Schwingungsgleichung}$$

linear, 2. Ordng., homogen

$$x(t) = c_1 \underbrace{\cos(\omega_0 t)}_{x_1} + c_2 \underbrace{\sin(\omega_0 t)}_{x_2}$$



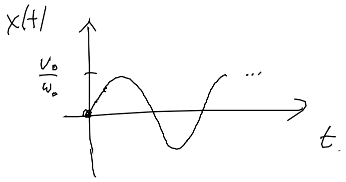
c_1, c_2 sind noch unbestimmt

$$x(0) = 0 \longrightarrow x(0) = c_1 \cos(\omega_0 t) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\dot{x}(0) = v_0 \longrightarrow \dot{x}(0) = c_2 \omega_0 \underbrace{\cos(\omega_0 t)}_{1} \overset{!}{=} v_0 \Rightarrow c_2 = \frac{v_0}{\omega_0}$$

Anfangsgeschwindigkeit

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$



<u>ohne Beweis</u> Test f. die lineare Unabhängigkeit $\{x_i\}$:

Verwendung Wronski-Determinante:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \cdots & \dot{x}_n \\ x_1^{(n)} & \cdots & & x_n^{(n)} \end{vmatrix} \neq 0 \longleftrightarrow \{x_i(t)\} \text{ bilden Fundamentalsystem}$$

<u>Bsp</u>: Schwingungsgleichung $x_1 = \sin(\omega_0 t)$ $x_2 = \cos(\omega_0 t)$

$$\begin{vmatrix} \sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) \\ \omega_0 \cos(\omega_0 t) & -\omega_0 \sin(\omega_0 t) \end{vmatrix} = -\omega_0 \sin^2(\omega_0 t) - \omega_0 \cos^2(\omega_0 t)$$

$$= -\omega_0 \neq 0$$

7.3. Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

1. Ordng. : $\dot{x}(t) + g(t)\,x(t) = f(t)$

(i) homogene Lösung : $\underbrace{\text{„}x\text{"}}\quad \underbrace{\text{„}t\text{"}}$ Abhängigkeit

$$\frac{d}{dt}x = -g\,x \longrightarrow \frac{dx}{x} = -g(t)\,dt$$

„Methode Trennung d. Variablen"

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{x'} = -\int_{t_0}^{t} dt'\,g(t') \longrightarrow \ln x\Big|_{x_0}^{x} = -G(t,t_0) \equiv \underbrace{-\int_{t_0}^{t} dt'\,g(t')}_{\text{bekannt}}$$

$$\ln\frac{x}{x_0} = -G(t,t_0) \longrightarrow x(t) = x_0\,e^{-G(t,t_0)}$$

$$x(t) = x_0\,e^{-\int_{t_0}^{t} dt'\,g(t')} = x_0\,\underline{\underline{x_1(t)}}$$

Bedeutg. x_0, t_0 : $x(t_0) = x_0$ sind Anfangsbedingungen

Probe durch Einsetzen + innere Ableitg. beachten (exp.-Fkt.)

homogene Lsg. : $x(t) = c_1\,\underline{\underline{x_1(t)}} \equiv c\,x_1(t)$

(ii) inhomogene Lösung:

$$\dot{x} + g(t)\,x = f(t)$$

Ansatz mit Methode „Variation der $\underline{\underline{\text{Konstanten}}}$" : $x_0 = \underline{\underline{c}}(t)\,x_1(t)$

$x_1(t)$ bekannt

einsetzen: $\dot{c} x_1 + \underbrace{c \dot{x}_1 + g c x_1}_{c(\underbrace{\dot{x}_1 + g x_1}_{=0 \text{ weil } x_1 \text{ die homogene Dgl. löst}})} = f$

$$\dot{c} = \frac{f(t)}{x_1(t)} \qquad \text{rechte Seite bekannt}$$

$$\underbrace{c(t_0)}_{=0}\!: \quad c(t) - c(t_0) = \int_{t_0}^{t} dt' \, \frac{f(t')}{x_1(t')} = \int_{t_0}^{t} dt' \, f(t') \, e^{\int_{t_0}^{t'} dt'' g(t'')}$$

$c(t_0) = 0$ o.B.d.A. → nur eine spezielle Lsg. nötig

spezielle Lsg $x_0(t) = c(t) \, x_1(t)$

(iii) allgemeine Lösung:

$$x(t) = \underbrace{c_1 \, e^{-\int_{t_0}^{t} dt' g(t')}}_{\text{homog. Lsg., } c_1 = \text{Konstante}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} dt' f(t') \, e^{\int_{t_0}^{t'} dt'' g(t'')} \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} dt' g(t')}}_{\text{spezielle Lsg. d. inhomog. Dgl.: } c \cdot x_1}$$

$$\boxed{x(t) = \left(c_1 + \int_{t_0}^{t} dt' f(t') \, e^{\int_{t_0}^{t'} dt' g(t')} \right) e^{-\int_{t_0}^{t} dt' g(t')}}$$

c_1 = konstant, d. AB zu bestimmen

$f(t), g(t)$ sind bekannt

Bemerkung beim Trennen der Variablen:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \, g(t) \quad \longrightarrow \quad \int \frac{dx}{f(x)} = \int dt \, g(t)$$

nichtlinear

auch in dieser Form f. nichtlineare Dgl. möglich.

7.4. Ein Beispiel f. eine nichtlineare Dgl.

Zeitliche Dynamik von Laserphotonen $n(t)$ (Photonzahl)

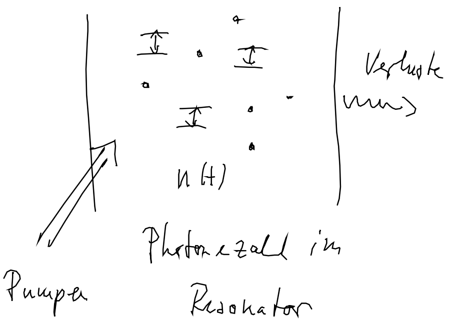
$$\dot{n}(t) = -K_1 n(t) - K_2 n^2(t)$$

(Verlust − Pumpen) $\hat{=} K_1$

stimulierte Prozesse, Lichtemission

Verlust > Pumpen $K_1 > 0$

Pumpen > Verlust $K_1 < 0$



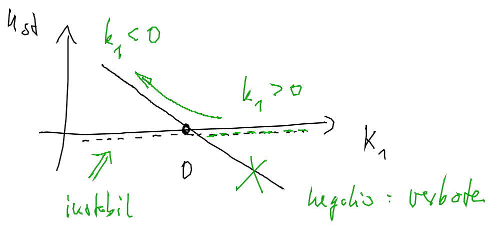
zeitl. Lösung → ü A

stationäre Lösung → hier: n = Konstant → $\dot{n} = 0$ ⇒ n_{st} = stationär

$$n_{st}\,(K_1 + K_2 n_{st}) = 0$$

→ 2 Lösungen ↗ $n_{st} = 0$ ↘ $n_{st} = -\frac{K_1}{K_2}$ nicht eindeutig

Natur entscheidet sich f. stabile Lösung



Stabilität testen:

$$n(t) = n_{st} + \underbrace{\xi e^{\lambda t}}_{\text{kleine Störung}}$$

$\lambda < 0$ → stabil

$\lambda > 0$ → instabil