9. Grundgleichungen der Theoretische Physik

(für Anfänger)

9.1. Klassische Mechanik (TP I)

Newtonsches Grundgesetz $\frac{d}{dt}\vec{p}(t) = \vec{f}(\vec{r},t)$ (1687)

Zeitableitg. Impulses = eingeprägter Kraft

$\vec{p} = m(t)\,\dot{\vec{r}}(t)$

m kann zeitabhängig sein. Relativitätstheorie $m = m(\dot{\vec{r}})$

Woher? Dirac: „we want eqs. which describe nature ...
and we have to reconcile to an absence of strict logics."

Bemerkg: a) gewöhnliche Dgl. 2. Ordng. f. punktförmige Objekt Bahnkurve $\vec{r}(t)$

Eigenschaft d. Objekts: Masse m

später: ausgedehnte Körper aus viele Massepkt. bilden

b) Lösbarkeit der Gleichg:

(i) wenn $\ddot{\vec{r}}$ und $\vec{f}$ gemessen wird f. m = konstant,
so ist NGG die Definition der Masse

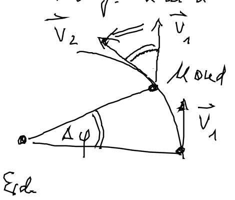
(ii) wenn m und $\ddot{\vec{r}}$ gemessen werden,
so ist NGG die Definition der Kraft

c) Gravitationskraft:

bekannt nach NGG, wenn m = konstant, so $\ddot{\vec{r}} \simeq \vec{a}$

$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ Ändg. der Geschwindigkeit pro Zeit

Kepler 1: Ellipsenbahn ≈ Kreis f. kleine Winkel



$v_1 = v_2$

$\Longrightarrow \;\hat{=}\; \Delta v$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v\,\Delta\varphi}{\Delta t} \approx \frac{2\pi r}{T}\cdot\frac{2\pi}{T} \sim \frac{r}{T^2} \qquad \left(\sim \frac{v^2}{r}\right) \quad *$$

$$\sin\Delta\varphi \approx \Delta\varphi = \frac{\Delta v}{v}$$

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}, \quad v = \frac{2\pi r}{T}$$

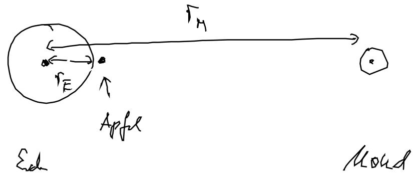
Umlaufzeit

Kepler 3: Umlaufzeit $T \sim r^{3/2}$

$$\Rightarrow \quad a \sim \frac{1}{r^2} \sim f \quad \Longrightarrow \text{Ellipsenbahnen + Kreisbahn}$$

Konstante entsprechend Einheitensystem und Beobachtg. festlegen

d) experimentelle Test der „Universalität" der Gravitation:
Vgl. fallender Apfel + Mondbahn



Verhältnis der Entfernungen 1 : 60

$$\frac{f_{Apfel}}{f_{Mond}} = \frac{a_{Apfel}}{a_{Mond}} = \frac{1/r_E^2}{1/r_M^2} = \left(\frac{r_M}{r_A}\right)^2 = 3600$$

experimentell

$$a_{Mond} = \frac{v_{Mond}^2}{r_M} = 2{,}7 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s^2}$$

Kreisbahn

$$g = a_{Apfel} = 9{,}8 \frac{m}{s^2}$$

$$\frac{g}{a_{Mond}} = \underline{\underline{3600}}$$

<u>Theorie wird universell!</u>

<u>9.2. Quantenmechanik</u> (TP II)

- Modifizierg. unserer Alltagserfahrung im Mikrokosmos erzwingt neue Theorie (Elektronen, Atome ...)
- ein- und dasselbe Objekt (z.B e^-) zeigt $\underbrace{\text{Wellen- bzw Teilchenaspekte}}$ in verschiedenen Experimenten

$\rightsquigarrow$ Begriffe nicht ausreichend $\to$ „Quanten"

- tiefere Ursache: <u>Messprozeß</u> muß mitbetrachtet werden im Mikrokosmos

a) Unschärferelation:

Teilchenbeobachtung mit Licht

wo: Δx Intervall, wie: Licht Wellenlänge λ

(*) $\Delta x \geq \lambda$ nach Rayleigh-Kriterium

$\lambda = \frac{2\pi}{k_{Licht}}$ $\quad k_{Licht}$ Wellenzahl

nutze Comptoneffekt : Photon + Elektron stoßen wie Billardkugeln

$$\underset{\text{Lichtimpuls}}{p_{Licht}} \overset{\downarrow}{=} \hbar k = \hbar \frac{2\pi}{\lambda} \quad \rightsquigarrow \text{ Impulsübertrag : } \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teilchen}}}{\Delta p} = \frac{\hbar\, 2\pi}{\lambda}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

einsetzen in (*) $\quad \Delta x \geq \frac{h}{\Delta p}$

$$\boxed{\Delta x \, \Delta p \geq h}$$ (naive) Heisenbergunschärfe

Lokalisierung Δx (Ortsunschärfe) geht immer mit Impulsunschärfe Δp

zusammen : $\Delta x \downarrow \; \rightarrow \; \Delta p \uparrow$

b) aus Experimenten :

$\exists$ Interferenzeffekte bei Elektronen (mit Impuls $\vec{p}$) $\rightsquigarrow$ Zuordnung v. λ

$$|\vec{p}| = \frac{h}{\lambda} \quad , \quad \vec{p} = \hbar \vec{k}$$

$\exists$ Stoßexperimente mit Licht (mit Frequenz ω) $\rightsquigarrow$ Zuordnung v. Energie E

$$E = \frac{hc}{\lambda} \equiv \hbar\omega$$

c) de Broglie - Beziehungen :

$$\left.\begin{array}{l} E = \hbar\omega \\ \vec{p} = \hbar \vec{k} \end{array}\right\} \quad \underset{\text{f. klass. Teilchen}}{E = \frac{m}{2} v^2} = \underset{\substack{\uparrow \\ p = mv}}{\frac{p^2}{2m}} = \underbrace{\frac{(\hbar k)^2}{2m} = \hbar\omega}_{\text{Dispersionsrelation f. Welle}}$$

$$\omega = \omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m} \qquad \text{quadratische Dispersion} \qquad (**)$$

d) Schrödingergleichung: Fouriertrafo der Dispersion.

$$i\hbar\, \partial_t\, \Psi(\vec r,t) = -\frac{\hbar^2 \Delta}{2m}\, \Psi(\vec r,t) \qquad \text{liefert } (**)$$

$\Psi(\vec r,t)$: wird Objekt „Quant“ zugeordnet

$\frac{\hbar^2 \Delta}{2m} \;\hat{=}\;$ kinetische Energie

Hinzunehmen der potentiellen Energie $V(\vec r)$

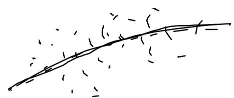
$$\boxed{\begin{aligned} i\hbar\, \partial_t\, \Psi(\vec r,t) &= \underline{H}\; \Psi(\vec r,t) \\ H &= -\frac{\hbar^2 \Delta}{2m} + V(\vec r) \end{aligned}}$$

H: Hamiltonoperator

1. partielle Dgl., zunächst lösen,
2. experimentelle Ergebnisse werden durch Bildg. v. Mittelwerten gewonnen:

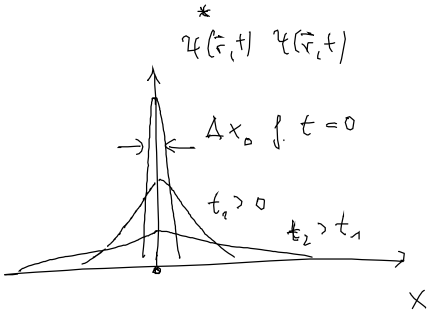
$$\langle \vec r(t) \rangle = \int d^3 r\; \underbrace{\Psi^*(\vec r,t)\, \Psi(\vec r,t)}_{\text{Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte}}\; \vec r$$

Mittelwert



$\langle r \rangle$

e) Zerfließen v. $\psi^*\psi$ für freie Teilchen



diffusionsartig

t_D : Zeit in der sich Verteilg. $\psi^*\psi$ um das doppelte verbreitert

$$t_D = \frac{\Delta x_0^2 \cdot m}{\hbar} \sim m$$

Elektron: $1\,\text{Å} \mathrel{\widehat{=}} \Delta x \curvearrowright t_D \cong 10^{-15}\,s$

Fußball: $20\,cm \mathrel{\widehat{=}} \Delta x \curvearrowright t_D \cong 10^{10}$ Jahre

f) Ehrenfesttheorem:

Gleichg. f. Mittelwert, statt v. Schrödingergleichg:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \underbrace{\int d^3r\, \psi^*(\vec{r},t)\, \psi(\vec{r},t)\, \vec{r}}_{\langle \vec{r}(t) \rangle} = \underbrace{-\int d^3r\, \psi^*(\vec{r},t)\, \psi(\vec{r},t)}_{-\langle \vec{\nabla} V(\vec{r}) \rangle} \underbrace{\vec{\nabla} V(\vec{r})}_{-\vec{f}_{\text{gravitat.}}}$$

wenn man keine Verbreiterung hat

$$\psi^*\psi = \cancel{\quad} = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t))$$

$$m\ddot{\vec{r}}_0 = -\vec{\nabla} V(\vec{r}_0) \mathrel{\widehat{=}} \text{Newton. Grundgesetz}$$

9.3. Schritte in die Feldtheorie (TP I, III)

a) Helmholtz-Vektortheorem:

wenn Vektorfeld $\vec{v}$ mindestens mit $\frac{1}{r^2}$ im ∞ abfällt

so ist $\vec{v}(\vec{r})$ mit $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$ und $\vec{\nabla}\times\vec{v}(\vec{r}) = \vec{w}(\vec{r})$

dann: $\vec{v} = \vec{v}_{grad} + \vec{v}_{rot}$, mit

$$\vec{v}_{grad} = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\vec{v}_{rot} = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\times\int d^3r' \frac{\vec{w}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Bsp: Maxwellgleichg: $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho_L}{\varepsilon_0}$, $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$

Ladungsdichte

elektr. Feld

Induktionsgesetz

Gravitationsfeld-stärke $\vec{g}$: $\vec{\nabla}\cdot\vec{g} = -4\pi G\rho_m$

Massedichte

$$\vec{\nabla}\times\vec{g} = 0$$

Wie werden Felder definiert $\vec{g}$, $\vec{E}$

$\vec{E}$-Feld: $\vec{E} \equiv \frac{\vec{f}_E}{q}$

q, m: Probeteilchen

$\vec{g}$-Feld: $\vec{g} = \frac{\vec{f}_G}{m}$

TP II: volle Maxwellgleichungen:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$$

Faraday Induktionsgesetz

Maxwell „Verschiebungsstrom"