

9. Grundgleichungen der Theoretischen Physik

(für Anfänger)

9.1. Klassische Mechanik (TPI)

Newtonsches Grundgesetz $\frac{d}{dt} \vec{p}(t) = \vec{f}(\vec{r}, t)$ (1687)

Zuständig Impuls = eingepreister Kraft

$$\vec{p} = m(t) \dot{\vec{r}}(t)$$

m kann \uparrow zuständig sein. Relativitätstheorie $m = m(\dot{\vec{r}})$

Wolke?

Dirac: „we want eqs. which describe nature ...

and we have to reconcile to an absence of strict logics.“

Bemerkung: a) gewöhnlich Dgl. 2. Ordnung f. punktförmiges Objekt Bahnkurve $\vec{r}(t)$

Eigenschaft d. Objekts: Masse m

später: ausgedehnte Körper aus vielen Massepkt. bilden

b) Lösbarkeit der Gleichung:

(i) wenn $\ddot{\vec{r}}$ und \vec{f} gemessen wird f. $m = \text{konstant}$,
so ist N.G.G. die Definition der Masse

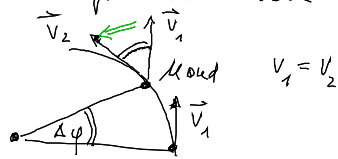
(ii) wenn m und $\ddot{\vec{r}}$ gemessen werden,
so ist N.G.G. die Definition der Kraft

c) Gravitationskraft:

bekannt nach N.G.G., wenn $m = \text{konstant}$, so $\ddot{\vec{r}} \approx \vec{a}$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{Ändg. der Geschwindigkeit pro Zeit}$$

Kepler 1: Ellipsebahn \approx Kreis f. kleinen Winkel



$\Rightarrow \hat{=} \Delta v$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \approx \frac{v \Delta \varphi}{\Delta t} \approx \frac{2\bar{u}r}{T} \cdot \frac{2\bar{u}}{T} \approx \frac{r}{T^2} \quad \left(\sim \frac{v^2}{r} \right)$$

$\sin \Delta \varphi \approx \Delta \varphi = \frac{\Delta v}{v}$

$\frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{2\bar{u}}{T}, \quad v = \frac{2\bar{u}r}{T}$
 ↑
 Umlaufzeit

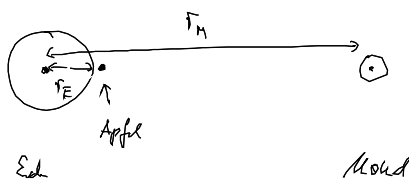
Kepler 3: Umlaufzeit $T \sim r^{3/2}$

$\downarrow \quad a \sim \frac{1}{r^2} \sim f \quad \Rightarrow \quad \text{Ellipsebahn + Kreisbahn}$

Konstante entsprechen Einheitsystem und Beobachtg. folgende

d) experimentelle Test der „Universalität“ der Gravitation:

Vgl. fallender Apfel + Mondbahn



Verhältnis der Entfernungen 1:60

$$\frac{f_{\text{Apfel}}}{f_{\text{Mond}}} = \frac{a_{\text{Apfel}}}{a_{\text{Mond}}} = \frac{1/r_E^2}{1/r_M^2} = \left(\frac{r_M}{r_E} \right)^2 = 3600$$

$$a_{\text{Mond}} = \frac{v_{\text{Mond}}^2}{r_M} = 2,7 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

↑
Kreisbahn

exp. Wert

$$g = a_{\text{Aphe}} = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\frac{g}{a_{\text{Mond}}} = \underline{\underline{3600}}$$

Theorie wird universell!

9.2. Quantenmechanik (TP II)

- Modifizierung unserer Alltagserfahrung im Mikrokosmos erzwingt neue Theorien (Elektronen, Atome ...)
- Mik- und makro Objekt (z.B. e^-) zeigt Wellen- bzw. Teilchenaspekte in verschiedenen Experimenten
- ↳ Begriffe nicht ausreichend → „Quanten“
- tiefere Ursache: Messprozess unip. nicht beobachtet werden im Mikrokosmos

a) Unschärferelation:

Teilchenbeobachtung mit Licht

wo: Δx Intervall, wie: Licht Wellenlänge λ

$$(*) \Delta x \geq \lambda \quad \text{nach Rayleigh-Kriterium}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k_{\text{Licht}}} \quad k_{\text{Licht}} \text{ Wellenzahl}$$

unb. Compton effekt: Photon + Elektron stoßen wie Billardkugeln

$$p_{\text{Licht}} = \hbar k = \hbar \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{Impuls übertrag: } \Delta p = \frac{\hbar 2\pi}{\lambda}$$

Lichtimpuls ↑ Teilchen

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

Heisenberg (*) $\Delta x \geq \frac{h}{\Delta p}$

$\Delta x \Delta p \geq h$

(naive) Heisenberg Ausdruck

Kohärenz Δx (Orbunsicherheit) geht immer mit Impulsunsicherheit Δp

Zusammen: $\Delta x \downarrow \rightarrow \Delta p \uparrow$

b) aus Experimenten:

↳ Interferenzeffekte bei Elektronen (mit Impuls \vec{p}) \rightarrow Zuordnung v. λ

$$|\vec{p}| = \frac{h}{\lambda}, \quad \vec{p} = \hbar \vec{k}$$

↳ Stoßexperimente mit Licht (mit Frequenz ω) \rightarrow Zuordnung v. Energie E

$$E = \frac{hc}{\lambda} \equiv \hbar \omega$$

c) die Broglie-Beziehungen:

$E = \hbar \omega$	}	$E = \frac{m}{2} v^2$	$= \frac{p^2}{2m}$	$= \frac{(\hbar k)^2}{2m}$	= $\hbar \omega$
$\vec{p} = \hbar \vec{k}$		f. klass.	↑	↑	
		Teilchen	$p = mv$	Dispersionsrelation f. Wellen	

$$\omega = \omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m} \quad \text{quadratisch Dispersion} \quad (**)$$

d) Schrödingergleichung: Folgerung aus Dispersion.

$$i\hbar \partial_t \psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2 \Delta}{2m} \psi(\vec{r}, t) \quad \text{liefert } (**)$$

$\psi(\vec{r}, t)$: wird Objekt "Orbit" zugeordnet

$$\frac{\hbar^2 \Delta}{2m} \hat{=} \text{kinet. Energie}$$


Hinzuzunehmen die potentielle Energie $V(\vec{r})$

$$\boxed{i\hbar \partial_t \psi(\vec{r}, t) = \underline{H} \psi(\vec{r}, t)} \quad H: \text{Hamiltonoperator}$$

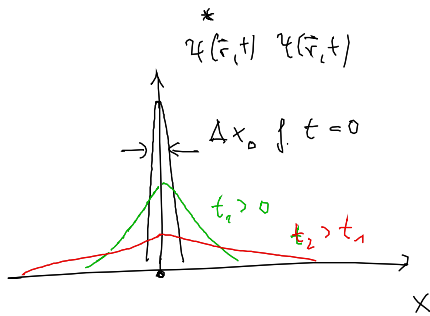
$$H = -\frac{\hbar^2 \Delta}{2m} + V(\vec{r})$$

1. partielle Dgl., zunächst lösen,
2. experimentelle Ergebnisse werden durch Bildg. v. Mittelwert herausgeholt:

$$\langle \vec{r}(t) \rangle = \int d^3r \underbrace{\psi^*(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t)}_{\text{Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte}} \vec{r}$$

\nearrow Mittelwert  $\langle \vec{r} \rangle$

e) Zepflüsse v. $\psi^* \psi$ für freie Teilchen



diffusionsartig

t_D : Zeit in der sich Verteilg. $\psi^* \psi$ um das doppelte Verbreitert

$$t_D = \frac{\Delta x_0^2 \cdot m}{\hbar} \quad \sim m$$

Elektron: $1 \text{ \AA} \hat{=} \Delta x \rightarrow t_D \approx 10^{-15} \text{ s}$

Fußball: $20 \text{ cm} \hat{=} \Delta x \rightarrow t_D \approx 10^{10} \text{ Jahre}$

f) Ehrenfest Theorem:

gleich. f. Mittelwert, Start v. Schrödinger gleich:

$$m \frac{d}{dt} \underbrace{\int d^3 r \psi^*(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) \vec{r}}_{\langle \vec{r}(t) \rangle} = - \underbrace{\int d^3 r \psi^*(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) \vec{\nabla} V(\vec{r})}_{-\langle \vec{\nabla} V(\vec{r}) \rangle} \quad \underbrace{\vec{\nabla} V(\vec{r})}_{\text{-f. grad.}}$$

wenn man keine Verteilung hat

$$\psi^* \psi = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t))$$

$$m \vec{\ddot{r}}_0 = - \vec{\nabla} V(\vec{r}_0) \hat{=} \text{Newton'sches Gesetz}$$

9.3. Schritte in der Feldtheorie (TPI, III)

a) Helmholtz-Vektortheorem:

Wenn Vektorfeld \vec{v} windschiff mit $\frac{1}{r^2}$ im ∞ abfällt

so ist $\vec{v}(\vec{r})$ mit $\nabla \cdot \vec{v}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$ und $\nabla \times \vec{v}(\vec{r}) = \vec{w}(\vec{r})$

dann: $\vec{v} = \vec{v}_{\text{grad}} + \vec{v}_{\text{rot}}$, mit

$$\vec{v}_{\text{grad}} = -\frac{1}{4\pi} \nabla \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\vec{v}_{\text{rot}} = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \int d^3r' \frac{\vec{w}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Bsp: Maxwellgleichung:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{\text{ext}}}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

\uparrow
ext. Feld
 \downarrow
Ladepdichte
 \uparrow
Induktionsstrom

Gravitationsfeld-Stärke \vec{g}

$$\nabla \cdot \vec{g} = -4\pi G \rho_m$$

\uparrow
Masse dichte

$$\nabla \times \vec{g} = 0$$

Wie werden Felder definiert \vec{g}, \vec{E}

\vec{E} -Feld: $\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}_E}{q}$

\vec{g} -Feld: $\vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m}$

q, m : Probeteilchen

TP 14: volle Maxwellgleichungen:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$$

↑
↑
 Faraday Induktionsgesetz Maxwell „Verdrängungsstrom“