6. Fourierdarstellung von Funktionen

einführendes Beispiel:

Dgl: $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$ harmonischer Oszillator

Ansatz – $x = x_0(\omega) e^{i\omega t}$ ω – zu bestimmender Parameter

„i" – imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= i\omega x_0 e^{i\omega t} \\ \ddot{x} &= -\omega^2 x_0 e^{i\omega t} \end{aligned}\right\} \text{ einsetzen}$$

$$\underbrace{(-\omega^2 + \omega_0^2)}_{=0} x_0 e^{i\omega t} = 0$$

$$= 0 \quad \leadsto \quad \omega = \pm \omega_0$$

man gewinnt 2 Lösungen $x(t) = a(\omega_0) e^{i\omega_0 t} + b(\omega_0) e^{-i\omega_0 t}$

$x(t)$ ist Überlagerung von $e^{\pm i\omega_0 t}$.

Frage: Kann man eine beliebige Funktion $f(t)$ als Überlagerung von verschiedenen Frequenzen darstellen?

Ja: 2 Möglichkeiten –

6.1) falls $f(t) = f(t+T)$, also T-periodisch, so:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega_n t} \quad \text{mit } \omega_n = \frac{2\pi n}{T}, \quad c_n: \text{Koeffizienten}$$

„Fourierreihe"

6.4.) falls $f(t)$ quadratintegrabel ist, ohne notwendige Periode, so:

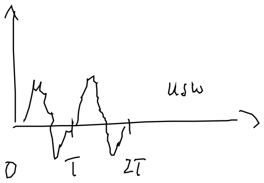
$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \tilde{f}(\omega)\, e^{i\omega t}$$

mit ω = kontinuierlich, $\tilde{f}(\omega)$: Fourier-transformierte

„Fouriertransformation"

6.1. Fourierreihe

Motivation – Frequenzanalyse von periodischen Vorgängen



Bestimmung der c_n's:

Ansatz $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{c_n}\, e^{in\frac{2\pi}{T}t}$ $\qquad c_n = ?$

Integrieren über $\frac{1}{T}\int_0^T dt\, e^{-im\frac{2\pi}{T}t}$ ...

$$\frac{1}{T}\int_0^T dt\, f(t)\, e^{-im\frac{2\pi}{T}t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{c_n}\, \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T dt\, e^{i(n-m)\frac{2\pi}{T}t}}_{\delta_{nm}}$$

δ_{nm} Kroneckersymbol

$= 1$ f. $n = m$

$= 0$ f. $n \neq m$

Beweis:

$$\frac{1}{T}\int_0^T dt\, e^{i(n-m)\frac{2\pi}{T}t} = \frac{1}{\cancel{T}}\,\frac{1}{i(n-m)\frac{2\pi}{\cancel{T}}}\left(e^{i(n-m)2\pi} - 1\right)$$

$$= \delta_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{f } n \neq m \text{, weil } e^{i(n-m)2\pi} = 1 \\ 1 & \text{f } n = m \text{, weil Taylor: } \dfrac{1 + i(n-m)2\pi - 1}{i(n-m)2\pi} = 1 \end{cases} =$$

$$\boxed{c_m = \frac{1}{T} \int_0^T dt \, f(t) \, e^{-im\frac{2\pi}{T}t}}$$

Berechnungsvorschrift für c_m.

Eigenschaften:

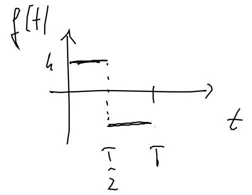
a) $f(t)$ reell $\rightarrow$ $c_{-n} = c_n^*$

b) $f(t)$ gerade $\rightarrow$ Kosinusreihe $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n2\pi}{T} t\right) + a_0$
bzgl. $\frac{T}{2}$

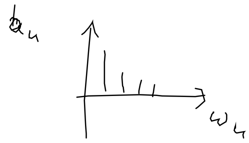
c) $f(t)$ ungerade $\rightarrow$ Sinusreihe $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n2\pi}{T} t\right) + 0$

Beispiele ÜA

Sprungfunktion:

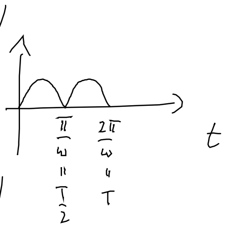


$\rightarrow$



$$f(t) = \frac{4h}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \dots\right) = \frac{4h}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)\omega t)}{(2k-1)}$$

Sinusbetrag



$$g(t) = h\,|\sin(\omega t)|$$

$$g(t) = \frac{4h}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2\omega t)}{3} - \dots\right) = \frac{2h}{\pi} - \frac{4h}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k\omega t)}{(2k)^2-1}$$

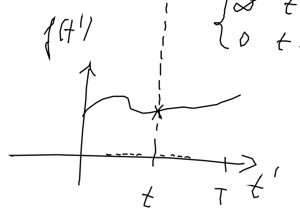
6.2. Einführung der δ-Funktion (heuristisch)

um δ-Funktion einzuführen, wird Fourierreihe überprüft:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{i\frac{2\pi n}{T}t}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T dt'\, f(t')\, e^{-in\frac{2\pi}{T}t'}}_{c_n}\; e^{i\frac{2\pi}{T}nt}$$

später $\delta(t-t') = \begin{cases}\infty & t=t' \\ 0 & t\neq t'\end{cases}$



$$f(t) \overset{!}{=} \underbrace{\int_0^T dt'\, f(t')\, \underbrace{\frac{1}{T}\sum_n e^{i\frac{2\pi n}{T}(t-t')}}_{\text{Funktion die aus Integral von } f(t') \text{ nur } t=t' \text{ herausnimmt}}}_{f(t)}$$

$$\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\frac{2\pi}{T}(t-t')} = X(t-t') \rightarrow \delta(t-t') \text{ untersuchen}$$

$$TX = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} e^{in\frac{2\pi}{T}(t-t')} + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\frac{2\pi}{T}(t-t')}}_{\text{geometrische Reihe f. } (t-t')\neq 0} - 1$$

(i) $\underline{t \neq t'}$ $\quad TX = \dfrac{1}{1-e^{i\frac{2\pi}{T}(t-t')}} + \dfrac{1}{1-e^{-i\frac{2\pi}{T}(t-t')}} - 1$

komplex erweitern und ausrechnen : $\underline{\underline{=0}}$

(ii) $\underline{t = t' + mT}$

$$TX = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\frac{2\pi}{T}(-mT)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 1 = \underline{\underline{\infty}}$$

a) definierende Eigenschaft der δ-Funktion:

$$\boxed{\begin{aligned} X(t-t') &= \delta(t-t') \\ \int dt'\, f(t')\, \delta(t-t') &= f(t) \end{aligned}}$$

b) kontinuierliche Darstellg. der δ-Funktion

$$X(\underbrace{t-t'}_{\Delta t}) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{2\pi}{T}n\Delta t} = \left| \begin{aligned} \frac{1}{T} &= \Delta\nu \\ \frac{2\pi}{T} &= \Delta\omega \end{aligned} \right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Delta\nu\, e^{i2\pi\Delta\nu n\Delta t}$$

$T \to \infty$
große Periode

$\Delta\nu \to 0$, Zerlegg. $\hat{=}$ Integral :

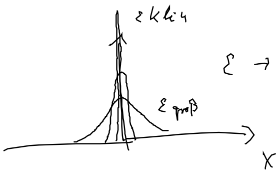
$$\boxed{\delta(t-t') = \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu\, e^{i2\pi\nu(t-t')} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{i\omega(t-t')}}$$

c) Approximation v. δ-Funktion durch Funktionfolge

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \underbrace{\delta_\varepsilon(x)}$$

echte Funktion

Bsp: $$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{i\omega x}\, e^{-|\omega|\varepsilon} = \frac{1}{\pi}\,\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$$



$\varepsilon \to 0$: δ-Fkt.

6.3. Funktionen als Elemente eines Vektorraums

Vektoren: $\sum$ Linearkomb. von Einheitsvektoren

Funktion: — " — von vollständigem Funktionssystem

$$f(t) = \sum_n c_n \underbrace{\varphi_n(t)}_{\text{vollständiges Funktionssystem}}$$: f. jede ist diese Darstellg. mgl.

Fourierreihe ist Bsp.

es gilt: $$\underbrace{\int dt\, \varphi_n^*(t)\, \varphi_m(t)}_{\text{Skalarprodukt}} = \delta_{nm} \qquad \left(\vec{e}_k \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}\right)$$

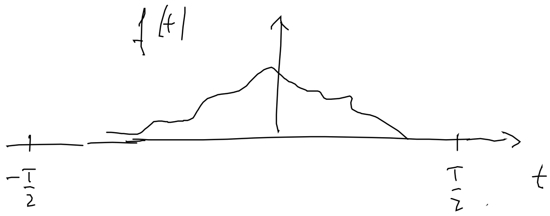
$$\underbrace{\sum_n \varphi_n^*(t)\, \varphi_n(t') = \delta(t-t')}_{\text{Vollständigkeitsrelation}}$$

Bsp. Fourierreihe, mit Funktionssystem $\left\{ \frac{e^{i n \frac{2\pi}{T} t}}{\sqrt{T}} \right\}_{\forall n}$

symmetrische Definition

6.4. Fouriertransformation

Motivation: Spektralanalyse Funktion die nicht periodisch ist



f. $T \to \infty$, d.h. großes Periodizitätsintervall Formeln spezialisieren

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt\, f(t)\, e^{-i\omega_n t} \quad , \quad f(t) = \sum_n c_n\, e^{i\omega_n t}$$

$$\left(T c_n\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, f(t)\, e^{-i\omega_n t} \equiv \tilde{f}(\omega_n) \qquad \omega_n : \text{fest im Integral}$$

$T \to \infty$

$$\boxed{\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, f(t)\, e^{-i\omega t}}$$

Fouriertransformierte der Funktion $f(t)$.

$f(t)$ soll also dargestellt werden:

$$f(t) = \sum_n c_n\, e^{i\frac{n 2\pi}{T} t} = \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{T} \sum_n \left(c_n T\right) e^{i\frac{n 2\pi}{T} t}$$

$\left(\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} \to 0 \quad , \text{ es entsteht Zerlegung in Frequenz:} \right)$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_n \Delta\omega\, \tilde{f}(\omega_n)\, e^{i\omega_n t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \tilde{f}(\omega)\, e^{i\omega t}$$

$\omega_n = n\Delta\omega$

$\Delta\omega \to 0$

$n\Delta\omega = \omega_n \to \omega$

Fourierdarstellg. einer nichtperiodischen Funktion (quadratintegrabel!)

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, \tilde{f}(\omega) \, e^{i\omega t}}$$

Eigenschaften:

a) $f(t)$ reell $\quad \tilde{f}(-\omega) = \tilde{f}^*(\omega)$

b) vollständiges Funktionensystem $\quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t} \right\}_\omega = \left\{ \varphi_\omega(t) \right\}_\omega$

$\int d\omega \, \varphi_\omega^*(t) \, \varphi_\omega(t') = \delta(t-t')$ Vollständigkeit

$\int dt \, \varphi_\omega^*(t) \, \varphi_{\omega'}(t) = \delta(\omega-\omega')$ Orthogonalität

Beispiele:

Exponentialfunktion $\quad f(t) = a_0 e^{-\gamma t} \Theta(t) \quad : \quad \tilde{f}(\omega) = \frac{a_0}{\gamma + i\omega}$

Gaußfunktion $\quad f(t) = a_0 e^{-t^2 \gamma^2} \quad : \quad \tilde{f}(\omega) = \frac{\sqrt{\pi} a_0}{\gamma} e^{-\frac{\omega^2}{4\gamma^2}}$

Konstante $\quad f(t) = a_0 \quad : \quad \tilde{f}(\omega) = 2\pi a_0 \delta(\omega)$

δ-Funktion $\quad f(t) = a_0 \delta(t) \quad : \quad \tilde{f}(\omega) = a_0$