

6. Fouriersdarstellung von Funktionen

Beispielsweise Beispiel:

Dgl: $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$ harmonischer Oszillator

Ausatz - $x = X_0(\omega) e^{i\omega t}$ ω - zu bestimmender Parameter
"i" - imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= i\omega X_0 e^{i\omega t} \\ \ddot{x} &= -\omega^2 X_0 e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \text{einsetzen}$$

$$\underbrace{(-\omega^2 + \omega_0^2)} X_0 e^{i\omega t} = 0$$

$= 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \pm \omega_0$

man gewinnt 2 Lösungen $x(t) = a(\omega_0) e^{i\omega_0 t} + b(\omega_0) e^{-i\omega_0 t}$

$x(t)$ ist Überlagerung von $e^{\pm i\omega_0 t}$.

Frage: Kann man eine beliebige Funktion $f(t)$ als Überlagerung von verschiedenen Frequenzen darstellen?

Ja: 2 Möglichkeiten -

6.1) falls $f(t) = f(t+T)$, also T -periodisch, so:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega_n t} \quad \text{mit } \omega_n = \frac{2\pi n}{T}, \quad c_n: \text{Koeffizienten}$$

"Fourierreihe"

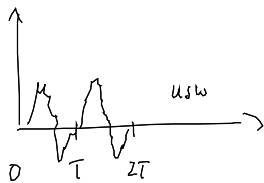
6.4) falls $f(t)$ quadratintegrabel ist, ohne notwendige Periode, so:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} \quad \text{mit } \omega = \text{kontinuierlich, } \tilde{f}(\omega): \text{Fourier-} \\ \text{transformierte}$$

„Fourierhausformel“

6.1. Fourierreihe

Motivation - Frequenzanalyse von periodischen Vorgängen



Bestimmung der c_n 's:

$$\text{Ansatz } f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i n \frac{2\pi}{T} t} \quad c_n = ?$$

$$\text{Integriere über } \frac{1}{T} \int_0^T dt e^{-i m \frac{2\pi}{T} t} \dots$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt f(t) e^{-i m \frac{2\pi}{T} t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T dt e^{i(n-m) \frac{2\pi}{T} t}}_{\delta_{nm} \text{ Kroneckersymbol}}$$

$$\begin{aligned} &= 1 \quad \text{f. } n=m \\ &= 0 \quad \text{f. } n \neq m \end{aligned}$$

Beweis:

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt e^{i(n-m) \frac{2\pi}{T} t} = \frac{1}{T} \frac{1}{i(n-m) \frac{2\pi}{T}} \left(e^{i(n-m) 2\pi} - 1 \right)$$

$$= \delta_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ 1 & \text{für } n = m \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{weil } e^{i(n-m)2\pi} = 1 \\ \text{weil Taylor: } \frac{1 + i(n-m)2\pi - 1}{i(n-m)2\pi} = 1 \end{array}$$

$$c_m = \frac{1}{T} \int_0^T dt f(t) e^{-i m \frac{2\pi}{T} t}$$

Bestimmungsvorschrift für c_m .

Eigenschaften:

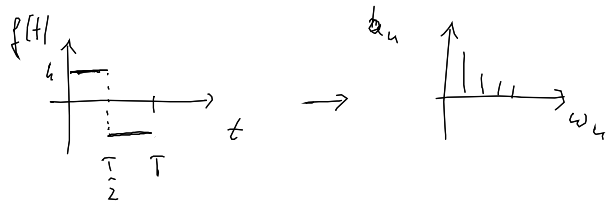
a) $f(t)$ reell $\rightarrow c_{-n} = c_n^*$

b) $f(t)$ gerade \rightarrow Kosinusreihe $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n2\pi}{T} t\right) + a_0$
 bzgl. $\frac{T}{2}$

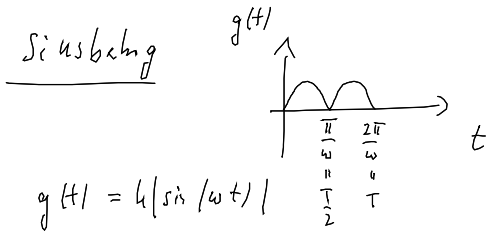
c) $f(t)$ ungerade \rightarrow Sinusreihe $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n2\pi}{T} t\right) + 0$

Beispiele uA

Sprungfunktion:



$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \dots \right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)\omega t)}{(2k-1)}$$



$$g(t) = \frac{4h}{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2\omega t)}{3} - \dots \right) = \frac{2h}{\pi} - \frac{4h}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k\omega t)}{(2k)^2 - 1}$$

6.2. Einführung der δ -Funktion (heaviside)

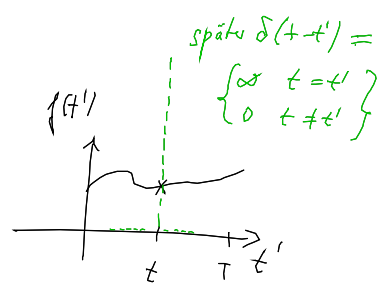
um δ -Funktion zu finden, wird Fourierreihe überprüft:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i \frac{2\pi k}{T} t}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T dt' f(t') e^{-i n \frac{2\pi}{T} t'}}_{c_n} e^{i \frac{2\pi}{T} n t}$$

$$f(t) \stackrel{!}{=} \int_0^T dt' f(t') \underbrace{\frac{1}{T} \sum_n e^{i \frac{2\pi n}{T} (t-t')}}_{\text{Funktion die aus Integral von } f(t') \text{ nur } t=t' \text{ herausnimmt}}$$

$f(t)$



$$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i n \frac{2\pi}{T} (t-t')} = X(t-t') \rightarrow \delta(t-t') \text{ untersuchen}$$

$$T X = \sum_{n=0}^{\infty} e^{i n \frac{2\pi}{T} (t-t')} + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i n \frac{2\pi}{T} (t-t')} - 1$$

geometrische Reihe f. $(t-t') \neq 0$

$$(i) \quad \underline{t \neq t'} \quad TX = \frac{1}{1 - e^{i \frac{2\pi}{T}(t-t')}} + \frac{1}{1 - e^{-i \frac{2\pi}{T}(t-t')}} - 1$$

komplex erweitern und ausrechnen: = 0

$$(ii) \quad \underline{t = t' + mT}$$

$$TX = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i k \frac{2\pi}{T} (-mT)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 1 = \underline{\underline{\infty}}$$

a) definierend Eigenschaft der δ -Funktion:

$$X(t-t') = \delta(t-t')$$

$$\int dt' f(t') \delta(t-t') = f(t)$$

b) kontinuierliche Darstellg. der δ -Funktion

$$X(t-t') = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i \frac{2\pi}{T} k \Delta t} = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{T} = \Delta \nu \\ \frac{2\pi}{T} = \Delta \omega \end{array} \right| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta \nu e^{i 2\pi \Delta \nu k \Delta t}$$

$T \rightarrow \infty$
große Periode

$\Delta \nu \rightarrow 0$, Zähler $\hat{=}$ Integral:

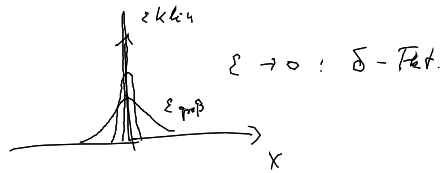
$$\delta(t-t') = \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu e^{i 2\pi \nu (t-t')} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i \omega (t-t')}$$

c) Approximation v. δ -Funktion durch Funktionfolge

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(x)$$

reelle Funktionen

$$\text{Bsp: } \delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega x} e^{-|\omega|\varepsilon} = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$$



6.3. Funktionen als Elemente eines linearen Vektorraums

Vektoren: \sum linear komb. von Basisvektoren

Funktion: - u - von vollständigem Funktionensystem

$$f(t) = \sum_n c_n \underbrace{\varphi_n(t)}_{\text{vollständiges Funktionensystem}} \quad : \text{ f. jede ist diese Darstellg. mögl.}$$

Fourierreihe ist Bsp.

$$\text{es gilt: } \underbrace{\int dt \varphi_n^*(t) \varphi_m(t)}_{\text{Skalarprodukt}} = \delta_{nm} \quad \left(\vec{e}_k \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \right)$$

$$\underbrace{\sum_n \varphi_n^*(t) \varphi_n(t')}_{\text{Vollständigkeitsrelation}} = \delta(t-t')$$

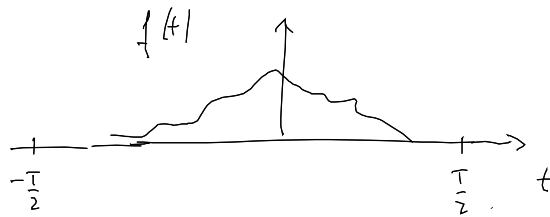
Bsp. Fourierreihe, mit Funktionensystem

$$\left\{ \frac{e^{i \frac{n 2\pi}{T} t}}{\sqrt{T}} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

↑
symmetrische Definition

6.4. Fouriertransformations

Motivation: Spektralanalyse Funktionen die nicht periodisch ist



$f: T \rightarrow \infty, dt$
 großes Periodizitätsintervall
 Formeln spezialisieren

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt f(t) e^{-i\omega_n t}, \quad f(t) = \sum_n c_n e^{i\omega_n t}$$

$$(T c_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) e^{-i\omega_n t} \equiv \tilde{f}(\omega_n) \quad \omega_n: \text{fest im Integral}$$

$$\boxed{\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) e^{-i\omega t}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Fourier transformierte der} \\ \text{Funktion } f(t). \end{array} \right\}$$

$f(t)$ soll aber dargestellt werden:

$$f(t) = \sum_n c_n e^{i \frac{n 2\pi}{T} t} = \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{T} \sum_n (c_n T) e^{i \frac{n 2\pi}{T} t}$$

($\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$, es entsteht Zählung in Frequenz:)

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_n \Delta\omega \tilde{f}(\omega_n) e^{i\omega_n t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t}$$

$\Delta\omega \rightarrow 0$
 $n\Delta\omega = \omega_n \rightarrow \omega$

Fourierdarstellg. einer nichtperiodischen Funktion (quadratintegrabel!)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t}$$

Eigenschaften:

a) $f(t)$ reell $\tilde{f}(-\omega) = \tilde{f}^*(\omega)$

b) vollständiges Funktionensystem $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t} \right\}_{\omega} = \left\{ \varphi_{\omega}(t) \right\}_{\omega}$

$$\int d\omega \varphi_{\omega}^*(t) \varphi_{\omega}(t') = \delta(t-t') \quad \text{Vollständigkeit}$$

$$\int dt \varphi_{\omega}^*(t) \varphi_{\omega'}(t) = \delta(\omega-\omega') \quad \text{Orthogonalität}$$

Beispiele:

Exponentialfunktion $f(t) = a_0 e^{-\gamma t} \theta(t) : \tilde{f}(\omega) = \frac{a_0}{\gamma + i\omega}$

Gaußfunktion $f(t) = a_0 e^{-t^2/\tau^2} : \tilde{f}(\omega) = \frac{\sqrt{\pi} a_0}{\tau} e^{-\frac{\omega^2}{4\tau^2}}$

Konstante $f(t) = a_0 : \tilde{f}(\omega) = 2\pi a_0 \delta(\omega)$

δ -Funktion $f(t) = a_0 \delta(t) : \tilde{f}(\omega) = a_0$