7.5 Übersicht zu linearen Dgl. 2. Ordnung

2. Ordnung: $\ddot{x}(t) + g_1(t)\,\dot{x}(t) + g_0(t)\,x(t) = f(t)$

- keine allgemeine Lösung, sehr wohl aber für Spezialfälle
- zunächst einige Regeln:

(i) wenn homog. Lsg. $h\ x(t) = 0$ bekannt,
also $x_L = c_1\, x_1(t) + c_2\, x_2(t)$, so ist Variation der Konstanten $c_1(t)$, $c_2(t)$ ein zum Ziel führender Ansatz (genau im Beispiel) zur Lsg. der inhomogen Dgl.

(ii) wenn eine hom. Lsg $x_1(t)$ bekannt ist, so 2. Lsg: $x_2(t) = c_1(t)\, x_1(t)$:

$$\ddot{c}_1 x_1 + \underline{c_1 \ddot{x}_1} + 2\dot{c}_1 \dot{x}_1 + g_1(\dot{c}_1 x_1 + \underline{c_1 \dot{x}_1}) + \underline{g\, c_1 x_1} = f$$

$$\ddot{c}_1 + \left(2\frac{\dot{x}_1}{x_1} + g_1\right)\dot{c}_1 = \frac{f}{x_1}$$

$\dot{c}_1 = c \longrightarrow \dot{c}(t) + \tilde{g}(t)\,c(t) = \tilde{f}(t) \longrightarrow$ bekannt Dgl. 1. Ord ist lösbar nach $c(t)$

x_1 und $x_2 = c_1 x_1$ sind hier unabhängig (o.B.)

$$\begin{vmatrix} x_1 & c_1 x_1 \\ \dot{x}_1 & (\dot{c}_1 x_1 + c_1 \dot{x}_1) \end{vmatrix} = \dot{c}_1 x_1^2 + c_1 x_1 \dot{x}_1 - c_1 x_1 \dot{x}_1 = \dot{c}_1\, x_1^2$$

und bilden ein Fundamentalsystem.

(iii) Mgl. die homogen Lsg. zu finden sind vielfältig:
- λ-Ansatz bei konstanten Koeffizient
- Potenzreihenansatz, Variablentrafo etc....
- Übersicht in 7.6.

7.6 Methoden f. spez homogen. 2. Ordnungsgl.

a) konstante Koeffizienten: λ-Ansatz (exp-Ansatz)

$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0 \qquad a_1, a_2$ = zeitlich konstant.

$x = x_0\, e^{\lambda t}$: jede Ableitung gibt $1 \times \lambda$:

$$\lambda^2 x_0 e^{\lambda t} + a_1 \lambda x_0 e^{\lambda t} + a_0 x_0 e^{\lambda t} = 0$$

$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$ „charakteristische Gl."

$\Rightarrow \lambda = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}$

Bemerkungen: (i) λ i.a. komplex

(ii) $\exists$ ex. 2. Lsg. mit λ_i $(i=1,2) \to x_1, x_2$ als 2. Fundamentallsg.

(iii) wenn $\sqrt{} = 0$, so ist $\lambda_{1/2} = -\frac{a_1}{2}$: nur 1. Lsg.

$\Rightarrow$ mit (ii) aus 7.5 die 2. Lösung bestimmen:

$$x_1 \ddot{c}_1(t) + (2\dot{x}_1 + a_1 x)\dot{c}_1 = 0$$

$$\ddot{c}_1 + \underbrace{(2\lambda + a_1)}_{\text{„}0\text{"}} \dot{c}_1 = 0$$

$$\ddot{c}_1 = 0 \to \dot{c}_1 = b_0 = \text{konstant} \Rightarrow c_1 = b_0 t + b_1$$

Fundamentalsystem

$$x_2 = e^{\lambda t} t \quad , \quad x_1 = e^{\lambda t}$$

und wieder liegen 2. linear unabhängige Lsg vor, Wronski Det:

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ \lambda e^{\lambda t} & e^{\lambda t} + \lambda t e^{\lambda t} \end{vmatrix} = e^{2\lambda t} \neq 0$$

b) Ansatz über Funktionreihen! Anleihen aus lin. Algebra

$x(t) = \sum_n a_n \varphi_n(t)$ $\quad \{\varphi_n(t)\}$ sei vollständiges Funktionensystem im Raum der interessanten Fkt.

mgl. Ansatz Potenzreihe $\sum_n a_n t^n$ weil $\{t^n\}$ vollst System (o.B.)

im allgemeinen entsteht eine ∞ Reihe, mit rekursiv bestimmt Koeffizient: $a_{k+1} = F(a_k)$

Beispiel 1! supereinfach

$$t^2 \ddot{x} - 3t\dot{x} + 3x = 0$$

$$t^2 \sum_n a_n n(n-1) t^{n-2} - 3t \sum_n a_n n t^{n-1} + 3 \sum_n a_n t^n = 0$$

$$\sum_n a_n \underbrace{\{n(n-1) - 3n + 3\}}_{n^2 - n - 3n + 3 = 0} t^n = 0 \to \text{muss } \forall t \text{ gelten } \{t^n\} \text{ lin unabh.}$$

$$0 = n^2 - 4n + 3 \to n = 2 \pm \sqrt{4-3} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$x = c_1 t^3 + c_2 t^1$$

Probe: $t^2 \, 3 \cdot 2t - 3t\,3t^2 + 3t^2 = 0$ $\quad f. \; t^3$

$0 \quad -3t + 3t = 0$ $\quad f. \; t^1$

Beispiel 2. exp. Fkt als Potenzreihe

Definit. Fkt $f(x) = e^x$ über die Dgl.

$$f'(x) = f(x)$$

- Beispiel: Wachstum einer Population: $n(t)$ $\quad \frac{d}{dt} n(t) = \alpha\, n(t)$

Oszillator, starke Dämpfung $\quad \frac{d^2}{dt^2} x(t) + \gamma \frac{d}{dt} x(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$

c) Variablentransformation $t \to s$

$t = t(s)$ bzw. $s = s(t)$ $\quad$ beste Wahl sehen, raten, probieren oder lange durchhalten $\quad$ u.s(t) geschickt wählen.

$$\frac{d}{dt} x(t) \to \frac{ds}{dt} \frac{d}{ds} x(t(s)) = \frac{ds}{dt} \frac{d}{ds} \overset{(\sim)}{x}(s)$$

$$\frac{d}{dt} \to \frac{ds}{dt} \frac{d}{ds}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \to \left(\frac{ds}{dt} \frac{d}{ds}\right) \left(\frac{ds}{dt} \frac{d}{ds} \cdot\right)$$ hintereinander ausführen!

| Beispiel 1 aus 5!: $\quad t^2 \ddot{x} - 3t\dot{x} + 3x = 0$

Ansatz $t = e^s$

$s = \ln(t)$ $\qquad \frac{d}{dt} = \frac{1}{t} \frac{d}{ds} = e^{-s} \frac{d}{ds}$

$$e^{2s} e^{-s} \partial_s \left(e^{-s} \partial_s x(s)\right) - 3e^s e^{-s} \partial_s x(s) + 3x(s) = 0$$

$$e^s \left(e^{-s} x'' - e^{-s} x'\right) - 3x' + 3x = 0$$

$$x'' - x' - 3x' + 3x = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \qquad \lambda_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4-3} \qquad \lambda_{1/2} = \binom{1}{3}$$

$$x_{1/2}(s) = e^s, \; e^{3s}$$

$x_{1/2}(t) = t\,,\ (t)^3$ ✓ wie vorher

7.7 Anwendungsbeispiel f. Fourierreihe

lösen v. lin Dgl.

nochmal der harmonische Oszillator, angetrieben durch eine periodischen Kraft $F(t) = F(t+T)$

$x(t)$ sei Oszillatorauslenkung nach der Newtongleichung (Exp. physik)

$$m\ddot{x}(t) = \underbrace{-k\,x(t)}_{\text{rücktreibende Kraft}} \underbrace{-\tilde{\gamma}\,\dot{x}(t)}_{\text{Reibungskraft}} + \underbrace{\tilde{f}(t)}_{\text{äußere, periodische Kraft}}$$

Division mit m und neue Konstante → Normalform.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma\dot{x} = f(t) = \sum_n f_n e^{i\omega_n t} \qquad \left(\omega_n = \frac{2\pi}{T}\cdot n\right)$$

Fourieransatz $x(t) = \sum_n c_n e^{i\omega_n t}$ und Koeffizientvergleich, denn $e^{i\omega_n t}$ sind linear unabhängige Fkt.

$$(-\omega_n^2 + \omega_0^2 + i\omega_n\gamma)\,c_n = f_n \quad \Rightarrow \quad c_n = \frac{f_n}{(-\omega_n^2+\omega_0^2+i\omega_n\gamma)}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{f_n}{-\omega_n^2+\omega_0^2+i\omega_n\gamma}\right)e^{i\omega_n t}$$

Damit ist eine Lösung $x(t)$ als Funktion der Fourierkomponenten f_n der periodischen Kraft gegeben.

Anwendung auf ein Oszillator mit $f = \bar{f_0}\cos(\omega t)$ $\quad \omega = \frac{2\pi}{T}$

$$f_{\pm 1} = \frac{\bar{f}}{2} \rightarrow \quad x(t) = \underbrace{\frac{\bar{f}}{2}\frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega}}_{(n=1)} \quad \underbrace{+\,c.c.}_{(n=-1)}$$

$$x(t) = \frac{\bar{f}}{2}\,A\,e^{i\omega t} + c.c.$$

wobei
$$A = \frac{1}{\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega} = \frac{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2} = \frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2} - i\,\frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}$$

bestimme $A = |A|e^{i\varphi}$, sowie Phase φ $\quad \{\gamma\omega < 0\} \Rightarrow -\pi \le \varphi \le 0$

$$|A| = \sqrt{\left(\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)+\gamma^2\omega^2}\right)^2 + \frac{\gamma^2\omega^2}{((\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2)^2}} = \frac{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}}{(\omega_0^2-\omega^2)+\gamma^2\omega^2} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)+\gamma^2\omega^2}}$$

$$\tan\varphi = \frac{\operatorname{Im}A}{\operatorname{Re}A} = \frac{-\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2} = \frac{\gamma\omega}{\omega^2-\omega_0^2}$$

Insgesamt

$$x(t) = \frac{\bar f}{2} |A| e^{i\varphi} e^{i\omega t} + c.c. = \bar f \, |A| \cos(\omega t + \varphi)$$

$$= \bar f \, \frac{\cos(\omega t + \varphi(\omega_0, \omega, \gamma))}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

Lösung der Oszillatorgl. bei vorgegebener externer Kraft $f(t) = \bar f \cos(\omega t)$

noch nicht die allgemeine Form (siehe Kapitel zu Dgl)

Bemerkungen

a) ω_0, γ sind durch Oszillatoreigenschaft fest vorgegeben, ω als Frequenz der externen Kraft kann verändert werden. Lösung folgt phasenverschoben der externen Kraft.

b) $\omega \to 0$ sehr langsame Kraftänderung:

$\tan\varphi \to 0 \Rightarrow \varphi = 0 \quad \to \quad x(t) = \bar f \cos(\omega t) / \omega_0^2$

Der Oszillator folgt in seiner Bewegung exakt der Kraft.

c) $\omega \to \infty$ sehr schnelle Kraftänderung:

$\to \quad \varphi \to \pi$

$x(t) = \bar f \, \frac{\cos(\omega t + \pi)}{\omega^2} \to 0$ für $\omega \to \infty$

Die Auslenkung verschwindet, der Oszillator kann der Kraft nicht mehr folgen.

d) $\omega \to \omega_0$

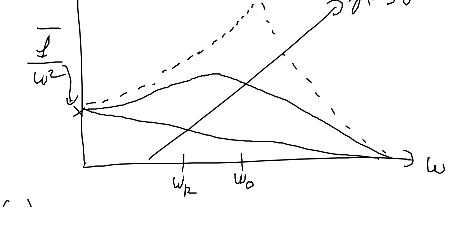
$\tan\varphi \to \infty \to \varphi = \frac{\pi}{2} \qquad x(t) = \frac{\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})}{\gamma\omega}$

Der Oszillator folgt der Kraft mit einer Phasenverschiebung von $\frac{\pi}{2}$.

Ohne Dämpfung $\gamma \to 0$ kommt es zur Resonanzkatastrophe.

e) allgemeiner Fall $\quad x(t) = a(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega))$

(i) Amplitude $\quad a = \frac{\bar f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}}$



$$\frac{\partial a}{\partial \omega} = 0 \propto \Big|_{\omega = \omega_R} 2(\omega_0^2 - \omega^2) \cdot (-2\omega) + 2\gamma^2\omega$$

$$-2(\omega_0^2 - \omega_R^2) + \gamma^2 = 0$$

$$\omega_R^2 = \frac{1}{2}(2\omega_0^2 - \gamma^2)$$

(ii) Phasengang $\varphi = \arccos\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{[\quad]^{\frac{1}{2}}}\right)$

$\varphi(\omega)$