

7.5 Übersicht zu lineare Dgl. 2. Ordnung

2. Ordnung: $\ddot{x}(t) + g_1(t) \dot{x}(t) + g_0(t) x(t) = f(t)$

- keine allgemeine Lösung, sehr wohl aber für Spezialfälle

- zunächst einige Regeln:

(i) wenn homog. Lsg. h $x(t) = 0$ bekannt,

also $x_2 = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$, so ist Variation der Konstanten $c_1(t)$, $c_2(t)$ ein zum Ziel führender Ansatz (genau am Beispiel)

zur Lsg. der inhomogen Dgl.

(ii) wenn eine ^{hom.} Lsg $x_1(t)$ bekannt ist, so 2. Lsg: $x_2(t) = c_1(t) x_1(t)$:

$$\ddot{c}_1 x_1 + \underline{c_1 \ddot{x}_1} + 2\dot{c}_1 \dot{x}_1 + g_1(\dot{c}_1 x_1 + \underline{c_1 \dot{x}_1}) + g_0 \underline{c_1 x_1} = f$$

$$\ddot{c}_1 + (2 \frac{\dot{x}_1}{x_1} + g_1) \dot{c}_1 = \frac{f}{x_1}$$

$$\dot{c}_1 = c \rightarrow \dot{c}(t) + \tilde{g}(t) c(t) = \tilde{f}(t) \rightarrow \text{bekannt Dgl. 1. Ord. ist lösbar nach } c(t)$$

x_1 und $x_2 = c_1 x_1$ sind linear unabhängig (o.B)

$$\begin{vmatrix} x_1 & c_1 x_1 \\ \dot{x}_1 & (c_1 \dot{x}_1 + \dot{c}_1 x_1) \end{vmatrix} = \dot{c}_1 x_1^2 + c_1 x_1 \dot{x}_1 - c_1 x_1 \dot{x}_1 = \dot{c}_1 x_1^2$$

und bilden ein Fundamentalsystem

(iii) Mgl. die homogen Lsg. zu finden sind vielfältig:

- λ -Ansatz bei konstanten Koeffizienten
- Potenzreihenansatz, Variablentrennung etc.
- ü. beschränkt in 7.6.

7.6 Methoden f. spez. homogen. 2. Ordnungsgl.

a) konstante Koeffizienten: λ -Ansatz (exp-Ansatz)

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0$$

$a_1, a_2 = \text{zufällig konst.}$

$x = x_0 e^{\lambda t}$: jede Ableitung sieht λx :

$$\lambda^2 x_0 e^{\lambda t} + a_1 \lambda x_0 e^{\lambda t} + a_0 x_0 e^{\lambda t} = 0$$

1 2 . . . 1

$$\lambda + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad \text{„charakteristisch“}$$

$$\lambda = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}$$

Bemerkung: (i) λ i.a. komplex

(ii) Es ex. 2. Lsg. mit λ_i ($i=1,2$) $\rightarrow x_1, x_2$ als 2. Fundamentalsystem.

(iii) wenn $\sqrt{\quad} = 0$, so ist $\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2}$: nur 1. Lsg.

\rightarrow mit (ii) aus 7.5 die 2. Lösung bestimmen:

$$x_1 \ddot{c}_1(t) + (2x_1 + a_1 x) \dot{c}_1 = 0$$

$$\ddot{c}_1 + \underbrace{(2\lambda + a_1)}_{=0} \dot{c}_1 = 0$$

$$\dot{c}_1 = 0 \rightarrow \dot{c}_1 = b_0 = \text{konstant} \rightarrow c_1 = b_0 t + b_1$$

Fundamentalsystem

$$x_2 = e^{\lambda t} t, \quad x_1 = e^{\lambda t}$$

und wieder liegen 2. linear unabhängig vor, Wronski-Det:

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ \lambda e^{\lambda t} & e^{\lambda t} + \lambda t e^{\lambda t} \end{vmatrix} = e^{2\lambda t} \neq 0$$

b) Ansatz über Funktionenreihen: Anleihen aus line. Algebra

$$x(t) = \sum_n a_n \varphi_n(t)$$

$\{\varphi_n(t)\}$ Sei vollständiges Funktionensystem im Raum der interessierenden Fkt.

mgl. Ansatz Potenzreihe $\sum_n a_n t^n$ weil $\{t^n\}$ vollst. System (o. B.)
im allgem. entsteht die Reihe, mit rekursiv bestimmt Koeffizient $a_{k+1} = F(a_k)$

Beispiel 1: superlinear

$$t^2 \ddot{x} - 3t \dot{x} + 3x = 0$$

$$t^2 \sum_n a_n n(n-1) t^{n-2} - 3t \sum_n a_n n t^{n-1} + 3 \sum_n a_n t^n = 0$$

$$\sum_n a_n \{ n(n-1) - 3n + 3 \} t^n = 0$$

\rightarrow muss $\forall t$ gelten $\{t^n\}$ lin. unabh.

$$n^2 - n - 3n + 3 = 0$$

$$0 = n^2 - 4n + 3 \rightarrow n = 2 \pm \sqrt{4-3} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$x = c_1 t^3 + c_2 t^1$$

Probe: $t^2 \cdot 3 \cdot 2t - 3 + 3t^2 + 3t^2 = 0$ f. t^3
 $0 - 3 + 3t = 0$ f. t^1

Beispiel 2. exp. Fkt als Potenzreihe

Definiert Fkt $f(x) = e^x$ über die Def.

$$f'(x) = f(x)$$

- Beispiel Wachstum einer Population: $n(t)$ $\frac{d}{dt} n(t) = \alpha n(t)$

Oszillator, starkes Dämpfen $\frac{d^2}{dt^2} x(t) + \gamma \frac{d}{dt} x(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$

c) Variablentransformation $t \rightarrow s$

$t = t(s)$ bzw. $s = s(t)$ Beste Wahl sehen, rechen, probieren oder
 hier durchhalten $u = u(s(t))$ geschickt wählen.

$$\frac{d}{dt} x(t) \rightarrow \frac{ds}{dt} \frac{d}{ds} x(t(s)) = \frac{ds}{dt} \frac{d}{ds} x(s)$$

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{ds}{dt} \frac{d}{ds}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \rightarrow \left(\frac{ds}{dt} \frac{d}{ds} \right) \left(\frac{ds}{dt} \frac{d}{ds} \cdot \right) \text{ hintereinander ausführen!}$$

Beispiel 1 cos: $t^2 \ddot{x} - 3t \dot{x} + 3x = 0$

Ansatz $t = e^s$

$s = \ln(t)$

$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{t} \frac{d}{ds} = e^{-s} \frac{d}{ds}$$

$$e^{2s} e^{-s} \frac{d}{ds} \left(e^{-s} \frac{d}{ds} x(s) \right) - 3e^s e^{-s} \frac{d}{ds} x(s) + 3x(s) = 0$$

$$e^s \left(e^{-s} x'' - e^{-s} x' \right) - 3x' + 3x = 0$$

$$x'' - x' - 3x' + 3x = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4-3}$$

$$\lambda_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x_{1/2}(s) = e^s, e^{3s}$$

$$x_{1/2}(t) = t, (t)^3 \quad \checkmark \text{ wie vorher}$$

7.7 Anwendungsbeispiel f. Fourierreihe lösen v. lin Dgl.

modell der harmonische Oszillators, angetrieben durch eine periodische Kraft $F(t) = F(t+T)$

$x(t)$ sei Oszillatorauslenkung nach der Newtonsgleichung (Exp. physik)

$$m \ddot{x}(t) = -kx(t) - \gamma \dot{x}(t) + \tilde{F}(t)$$

rückwirkende Kraft
Reibungskraft
äußere, periodische Kraft

Division mit m und neue Konstante \rightarrow Normalform

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma \dot{x} = f(t) = \sum_n f_n e^{i\omega_n t} \quad (\omega_n = \frac{2\pi}{T} \cdot n)$$

Fourieransatz $x(t) = \sum_n c_n e^{i\omega_n t}$ und Koeffizientenvergleich, dann $e^{i\omega_n t}$ sind linear unabhängige Fkt.

$$(-\omega_n^2 + \omega_0^2 + i\omega_n \gamma) c_n = f_n \quad \rightarrow \quad c_n = \frac{f_n}{(-\omega_n^2 + \omega_0^2 + i\omega_n \gamma)}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{f_n}{-\omega_n^2 + \omega_0^2 + i\omega_n \gamma} \right) e^{i\omega_n t}$$

Damit ist eine Lösung $x(t)$ als Funktion der Fourierkomponenten f_n der periodischen Kraft gegeben.

Anwendung auf eine Oszillators mit $f = \bar{f}_0 \cos(\omega t)$ $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$f_{\pm 1} = \frac{\bar{f}}{2} \rightarrow x(t) = \frac{\bar{f}}{2} \frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} + c.c.$$

(n=1)
(n=-1)

$$x(t) = \frac{\bar{f}}{2} A e^{i\omega t} + c.c.$$

wobei $A = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} - i \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$

bestimme $A = |A| e^{i\varphi}$, sowie Phase φ $\{\gamma\omega < 0\} \Rightarrow -\pi \leq \varphi \leq 0$

$$|A| = \sqrt{\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \right)^2} = \frac{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}$$

$$\tan \varphi = \frac{\text{Im } A}{\text{Re } A} = \frac{-\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

Insight

$$x(t) = \frac{f}{2} |A| e^{i\varphi} e^{i\omega t} + c.c. = \bar{f} |A| \cos(\omega t + \varphi)$$

$$= \bar{f} \frac{\cos(\omega t + \varphi(\omega_0, \omega, \gamma))}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

Lösung der Oszillat. gl. bei vorgegebener externer Kraft $f(t) = \bar{f} \cos(\omega t)$
 noch nicht die allgemeine Form (siehe Kapitel zu Dgl)

Bemerkung

a) ω_0, γ sind durch Oszillat. eigenschaft fest vorgegeben, ω als Frequenz der externen Kraft kann verändert Lösung folgt phasenverschoben der externen Kraft.

b) $\omega \rightarrow 0$ sehr langsamer Kräfteänderung:

$$\tan \varphi \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi = 0 \rightarrow x(t) = \bar{f} \cos(\omega t) / \omega_0^2$$

Der Oszillator folgt in seiner Bewegung exakt der Kraft.

c) $\omega \rightarrow \infty$ sehr schnelle Kräfteänderung:

$$\rightarrow \varphi \rightarrow \pi$$

$$x(t) = \bar{f} \frac{\cos(\omega t + \pi)}{\omega^2} \rightarrow 0 \text{ für } \omega \rightarrow \infty$$

Die Auslenkung verschwindet, der Oszillator kann der Kraft nicht mehr folgen.

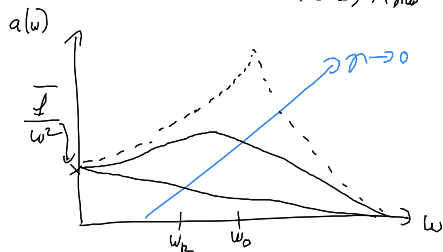
d) $\omega \rightarrow \omega_0$

$$\tan \varphi \rightarrow \infty \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \quad x(t) = \frac{\omega_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})}{\gamma \omega}$$

Der Oszillator folgt der Kraft mit einer Phasenverschiebung von $\frac{\pi}{2}$.
 Ohne Dämpfung $\gamma \rightarrow 0$ kommt es zu Resonanzkatastrophe.

e) allgemeiner Fall $x(t) = a(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega))$

(i) Amplitude $a = \frac{\bar{f}}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2]^{\frac{1}{2}}}$



$$\frac{\partial a}{\partial \omega} = 0 \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} &2(\omega_0^2 - \omega^2) \cdot (-2\omega + 2\gamma^2\omega) \\ &\omega = \omega_R \end{aligned} \right\}$$

$$-2(\omega_0^2 - \omega_R^2) + \gamma^2 = 0$$

$$\omega_R^2 = \frac{1}{2}(2\omega_0^2 - \gamma^2)$$

(ii) Phase lag $\varphi = \arccos \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{2}} \right)$

