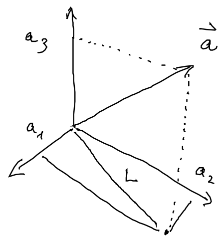
1.4. Rechnen mit Vektoren II: Betrag, Produkte

e) Betrag

$\hat{=}$ Länge eines Vektors

$$|\vec{a}| \overset{!}{=} \left(\sum_i a_i^2\right)^{1/2}, \text{ weil:}$$



$$L^2 = a_1^2 + a_2^2 = a_x^2 + a_y^2$$

$$|\vec{a}|^2 = \left(L^2 + a_3^2\right) \rightarrow = \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)^{1/2}$$

Bemerkg. Länge ($|\vec{a}|$) ist unabhängig vom Koordinatensystem

f) Punkt- bzw. Skalarprodukt

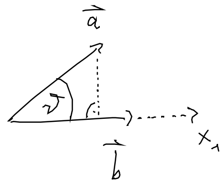
$$|\vec{a}|^2 = \sum_i a_i^2 \equiv \vec{a} \cdot \vec{a}^{(T)} \equiv (a_1, a_2\ a_3) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = (\cdot\ \cdot\ \cdot) \cdot (\cdot\ \cdot\ \cdot)$$

„Vorzeile - Nachspalte"

allgemeine Formulierg.:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_i a_i b_i$$

Geometrie:



spezielles Koordinate:

$$b_2 = 0 = b_3$$

$$\rightsquigarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \underset{m}{a_1 \cdot b_1} = |\vec{a}| \cdot \cos\vartheta\ \underset{m}{|\vec{b}|}$$

unabhängig v. Koordinatensystem notiern

$$\rightsquigarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{cases} |\vec{a}||\vec{b}| & \vartheta = 0 \Rightarrow \text{parallel} \\ 0 & \vartheta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \perp \end{cases}$$

$\rightarrow$ Mgl. d. Tests ob Vektoren $\perp$ aufeinander stehen

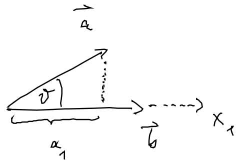
Eigenschaften: $\vec a \cdot \vec b = \vec b \cdot \vec a$ (kommutativ)

$\vec c \cdot (\vec a + \vec b) = \vec c \cdot \vec a + \vec c \cdot \vec b$ (distributiv)

g) Kreuzprodukt

Formulierung: $\vec c = \vec a \times \vec b \equiv \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

Geometrie



spezielles Koordinatensystem $b_2 = 0 = b_3$

$$\vec a \times \vec b = \begin{pmatrix} 0 \\ a_3 b_1 \\ -a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

↓ Betrag des Kreuzprodukts

$$|\vec a \times \vec b|^2 = a_3^2 b_1^2 + a_2^2 b_1^2 = (a_2^2 + a_3^2)\, b_1^2 = \sin^2\vartheta\, |\vec a|^2 |\vec b|^2$$

Länge d. Vektors $(\vec a \times \vec b) \hat{=} |\vec a|\, |\vec b|\, |\sin\vartheta|$

↓ Richtung d. Kreuzprodukts

$$\left.\begin{aligned} \vec a \cdot (\vec a \times \vec b) &= 0 + a_2 a_3 b_1 - a_3 a_2 b_1 = 0 \\ \vec b \cdot (\vec a \times \vec b) &= b_1 \cdot 0 + 0 \cdot a_3 b_1 - 0 \cdot a_2 b_1 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$\vec a$ und $\vec b$ steh $\perp$ auf $\vec a \times \vec b$

↓ Richtungssinn

am besten f. $b_1 = 1 = a_2 = a_3$

→ rechte Hand Regel f. Richtungssinn (RHR)

Eigenschaften: $\vec a \times \vec b = - \vec b \times \vec a$ (antikommutativ)

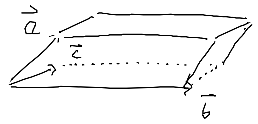
$\vec c \times (\vec a + \vec b) = \vec c \times \vec a + \vec c \times \vec b$ (distributiv)

$\vec a \times \vec b = |\vec a|\,|\vec b| \sin\vartheta \; \vec c_0 \longrightarrow$ wenn $\vec a \parallel \vec b \longrightarrow \vec a \times \vec b = 0$

Einheitsvektor nach RHR

4) Spatprodukt

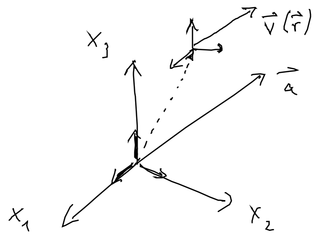
$$\underbrace{\vec a \cdot (\vec b \times \vec c)}_{\text{Zahl}}$$



$\hat{=}$ „Volumen des Spats" (Betrag)

= Höhe · Grundfläche (Kreuzprodukt)

1.5. Kartesische System



Einheitsvektoren: $\vec e_1 = (1,0,0)$

$\vec e_2 = (0,1,0)$

$\vec e_3 = (0,0,1)$

Einheitsvektoren sind an jedem Punkt identisch,
günstig z.B. um Vektorfeld $\vec v(\vec r)$ zu beschreiben.

Eigenschaften der Einheitsvektoren:

a) $|\vec e_i| = 1, \quad \vec e_i \cdot \vec e_j = \left\{ \begin{matrix} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{matrix} \right\} \equiv \delta_{ij}$

$\rightarrow$ „Einheitsvektoren bilden ein orthonormiertes Dreibein"

b) $\vec e_i \times \vec e_j = \vec e_k$ für $ijk = 1\,2\,3$, oder $3\,1\,2$, oder $2\,3\,1$ } „zyklisches Vertauschen" ansonst „−"-Zeichen

c) $\underbrace{\vec e_i \cdot (\vec e_j \times \vec e_k)}$ $= \begin{cases} 0, & \text{wenn 2 Indizes gleich} \\ 1, & \text{wenn } ijk \text{ zyklisch} \\ -1, & \text{wenn } ijk \text{ nicht zyklisch} \end{cases}$

$\equiv \varepsilon_{ijk}$: Def. d. ε-Symbols (Tensor) es gilt: $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{ikj}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1.6. Rechnen mit Koordinaten

$\vec{a} = \sum_i a_i \vec{e}_i$ Koordinatendarstellung nach Einheitsvektoren entwickelt

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \sum_i a_i \vec{e}_i \cdot \sum_j b_j \vec{e}_j = \sum_{ij} a_i b_j \underbrace{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j}_{\delta_{ij}} = \sum_i a_i b_i$$

$j \to i$

$$\underline{\underline{\vec{a}\times\vec{b}}} = \sum_i a_i \vec{e}_i \times \sum_j b_j \vec{e}_j = \sum_{ij} a_i b_j \underline{\vec{e}_i \times \vec{e}_j}$$

$$= \sum_{ijk} a_i b_j \underline{\sum_k \vec{e}_k \varepsilon_{ijk}} = \underline{\underline{\sum_{ijk} a_i b_j \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k}}$$

Test zu Hause
Def. d. ×-Produkts oben

(—: $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_k \vec{e}_k \varepsilon_{ijk}$ | $\cdot \vec{e}_l$ als Beweis)

einige Bsp. → Webseite

2) Felder, Vektorfelder

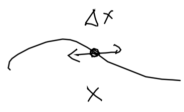
Größen die sich in Ort / Zeit ändern heißen Felder:

(i) skalare Felder $\phi(\vec{r}, t)$ (Temperaturfeld)

(ii) Vektorfelder $\vec{v}(\vec{r}, t)$ (Strömung)

2.1. Werkzeuge um Felder zu charakterisieren

a) Taylorreihe: Untersuchung in Umgebung Δx von x



$$\underbrace{f(x) = \sum_n c_n \varphi_n(x)}_{} \quad : \quad c_n \hat{=} \text{konstant}$$

$\varphi_n(x) \hat{=}$ vollständiges Funktionensystem

Aufspannen einer Funktion mit $\varphi_n(x)$

nach Taylor:
$$f(x+\Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Delta x^n, \quad \text{mit } c_n = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}$$

$$= f(x) + \frac{f'(x)}{1!} \Delta x + \frac{f''(x)}{2!} (\Delta x)^2 + \ldots$$

Approximation $f(x)$ um x

Ableitung d. Taylorreihe

$$f(x+\Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x) (\Delta x)^n = c_0 + c_1 \Delta x + c_2 (\Delta x)^2 + \ldots$$

gesucht: $c_n = ?$

$$f(x+\Delta x)\Big|_{\Delta x \to 0} = c_0 = f(x)$$

$$\frac{d}{d(\Delta x)} f(x+\Delta x)\Big|_{\Delta x \to 0} = 1 \cdot c_1 = f'(x)$$

$$\frac{d^2}{d(\Delta x)^2} f(x+\Delta x)\Big|_{\Delta x \to 0} = 1 \cdot 2 \cdot c_2 = f''(x)$$

ohne weitere Rechnung: $f^{(n)}(x) = n!\, c_n \rightarrow c_n = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}$ ✓

b) Erste Term d. Taylorreihe f. mehrdimensionale skalare Felder

$$\phi(\vec{r},t) = \phi(x,y,z,t)$$

$$\phi(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z,\ t+\Delta t)\Big|_{\substack{\text{1. Ordg. der Taylorreihe}\\ \text{in allen Variablen}}} =$$

$$\phi(x,y,z,t) + \Delta x \frac{d}{dx}\phi(x,y,z,t) + \Delta y \frac{d}{dy}\phi(x,y,z,t) + \Delta z \frac{d}{dz}\phi(x,y,z,t)$$

$$+ \Delta t \frac{d}{dt}\phi(x,y,z,t)$$

partielle Ableitg definiert zur Unterscheidung:

$$\frac{d}{dx}\phi(x,y,z,t) = \frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y,z,t) = \partial_x \phi(\dots) = \partial_1 \phi(x_1 \dots)$$

analog Zeit $\frac{\partial}{\partial t} \to \partial_t$, $\frac{\partial}{\partial x_i} \to \partial_{x_i} \to \partial_i$

$$\Delta x_i \to dx_i \quad , \quad \Delta t \to dt$$

$$d\phi(\vec{r},t) = \underbrace{dx\,\partial_x\phi + dy\,\partial_y\phi + dz\,\partial_z\phi}_{d\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\phi} + dt\,\partial_t\phi$$

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}\phi$$

c) Nablaoperator

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} = \sum_i \vec{e}_i\,\partial_i$$

Funktion d. Nablaoperator:

$$\text{grad}\,\phi = \vec{\nabla}\phi = \vec{e}_x\,\partial_x\phi + \vec{e}_y\,\partial_y\phi + \vec{e}_z\,\partial_z\phi$$

$\hat{=}$ Vektor

„Gradient eines skalaren Felds"

$$\operatorname{div} \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z \;\hat{=}\; \text{Zahl}$$

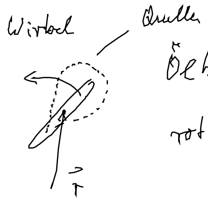
Divergenz

„Quelldichte eines Vektorfelds"

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_y v_z - \partial_z v_y \\ \partial_z v_x - \partial_x v_z \\ \partial_x v_y - \partial_y v_x \end{pmatrix} \;\hat{=}\; \text{Vektor}$$

„Wirbeldichte eines Vektorfelds"

Charakterisierung v. Felder



Öltropfen

$\operatorname{rot} \vec{v} \neq 0$