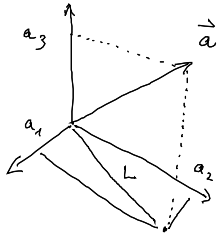


## 1.4. Rechnen mit Vektoren II: Betrag, Produkte

e) Betrag  $\hat{=}$  Länge eines Vektors



$$|\vec{a}| = \left( \sum_i a_i^2 \right)^{1/2}, \text{ weil:}$$

$$L^2 = a_1^2 + a_2^2 = a_x^2 + a_y^2$$

$$|\vec{a}|^2 = (L^2 + a_3^2) \rightarrow = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{1/2}$$

Bemerk. Länge ( $|\vec{a}|$ ) ist unabhängig vom Koordinatensystem

f) Punkt- bzw. Skalarprodukt

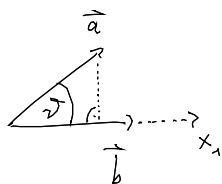
$$|\vec{a}|^2 = \sum_i a_i^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}^{(T)} = (a_1, a_2, a_3) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = (\dots) \cdot (\dots)$$

„Vorreile - Nachspalte“

allgemeine Formelung:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_i a_i b_i$$

Geometrie:



Spezielles Koordinatensystem:

$$b_2 = 0 = b_3$$

$$\downarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi \cdot |\vec{b}|$$

unabhängig v. Koordinatensystem nutzen

$$\downarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{cases} |\vec{a}| |\vec{b}| & \varphi = 0 \Rightarrow \text{parallel} \\ 0 & \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \perp \end{cases}$$

$\rightarrow$  Neg. d. Test ob Vektoren  $\perp$  zueinander stehen

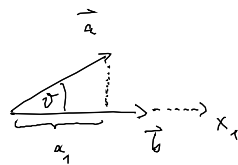
Eigenschaften:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$  (kommutativ)

$\vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b}$  (distributiv)

g) Kreuzprodukt

Formulierung:  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \equiv \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

Geometrie



spezielle Koordinatensystem  $b_2 = 0 = b_3$

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_3 b_1 \\ -a_2 b_1 \end{pmatrix}$

↓ Betrag des Kreuzprodukts

$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = a_3^2 b_1^2 + a_2^2 b_1^2 = (a_2^2 + a_3^2) b_1^2 = \sin^2 \alpha |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$

Länge d. Vektors  $(\vec{a} \times \vec{b}) \hat{=} |\vec{a}| |\vec{b}| |\sin \alpha|$

↓ Richtung d. Kreuzprodukts

$\left. \begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= 0 + a_2 a_3 b_1 - a_3 a_2 b_1 = 0 \\ \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= b_1 \cdot 0 + 0 \cdot a_3 b_1 - 0 \cdot a_2 b_1 = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\vec{a} \text{ und } \vec{b} \\ &\text{stehen } \perp \\ &\text{auf } \vec{a} \times \vec{b} \end{aligned}$

↓ Richtungsinn

am besten f.  $b_1 = 1 = a_2 = a_3$

→ rechte Hand Regel f. Richtungsinn (RHR)

Eigenschaften:  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$  (antikommutativ)

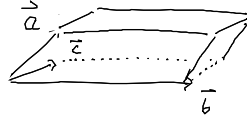
$\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}$  (distributiv)

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \vartheta \vec{e}_0 \rightarrow \text{wenn } \vec{a} \parallel \vec{b} \rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$$

↑  
Einheitsvektor nach RHR

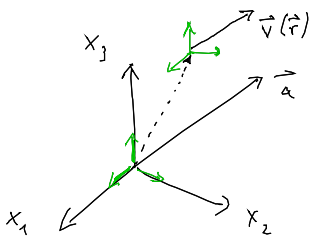
#### 4) Spatprodukt

$$\underbrace{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}_{\text{Zahl}}$$



$\hat{=}$  Volumen des „Spats“  
(Betrag)  
= Höhe  $\cdot$  Grundfläche  
(Kreuzprodukt)

#### 1.5. Kartesisches System



Einheitsvektoren:  $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$   
 $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$   
 $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$

Einheitsvektoren sind an jedem Punkt identisch,  
genauso z.B. um Vektorfeld  $\vec{v}(\vec{r})$  zu beschreiben.

Eigenschaften der Einheitsvektoren:

$$a) |\vec{e}_i| = 1, \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \equiv \delta_{ij}$$

$\rightarrow$  „Einheitsvekt. bilden ein orthonormiertes Dreiein“

$$b) \vec{e}_i \times \vec{e}_j = \vec{e}_k \quad \left\{ \begin{array}{l} ijk = 123, \text{ oder} \\ \quad \quad \quad 312, \text{ oder} \\ \quad \quad \quad 231 \end{array} \right\} \text{ „zyklischer Vertausche“ ausser „-“ Zeichen}$$

$$c) \underbrace{\vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k)} = \begin{cases} 0, & \text{wenn 2 Indizes gleich} \\ 1, & \text{wenn } ijk \text{ zyklisch} \\ -1, & \text{wenn } ijk \text{ nicht zyklisch} \end{cases}$$

$$\equiv \varepsilon_{ijk} : \text{Def. d. } \varepsilon\text{-Symbols (Tensor)}$$

es gilt:  $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{ikj}$

d)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1.6. Rechnen mit Koordinaten

$\vec{a} = \sum_i a_i \vec{e}_i$  Koordinatendarstellung nach Einheitsvektoren einindukt

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_i a_i \vec{e}_i \cdot \sum_j b_j \vec{e}_j = \sum_{ij} a_i b_j \underbrace{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j}_{\delta_{ij}} = \sum_i a_i b_i$

$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_i a_i \vec{e}_i \times \sum_j b_j \vec{e}_j = \sum_{ij} a_i b_j \vec{e}_i \times \vec{e}_j$   
 $= \sum_{ijk} a_i b_j \sum_k \vec{e}_k \varepsilon_{ijk} = \sum_{ijk} a_i b_j \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k$

Text zu Hause  
 Def. d. X-Produkts  
 über

( — :  $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_k \vec{e}_k \varepsilon_{ijk} \mid \vec{e}_i$  als Beweis )

einige Bsp. → übersehe

2) Felder, Vektorfelder

Größe die sich in Ort / Zeit ändern heißt Felder:

- (i) Skalare Felder  $\phi(\vec{r}, t)$  (Temperaturfeld)
- (ii) Vektorfelder  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  (Strömung)

2.1. Wie kann man Felder zu charakterisieren

a) Taylorreihe - Näherung in Umgebung  $\Delta x$  von  $x$



$$f(x) = \sum_n c_n \varphi_n(x) \quad : \quad c_n \hat{=} \text{konstant}$$

$\varphi_n(x) \hat{=} \text{vollständiges Funktionensystem}$

Aufspalten einer Funktion mit  $\varphi_n(x)$

nach Taylor:  $f(x + \Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Delta x^n$ , mit  $c_n = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}$

$$= f(x) + \frac{f'(x)}{1!} \Delta x + \frac{f''(x)}{2!} (\Delta x)^2 + \dots$$

Approximation  $f(x)$  um  $x$

Ableitg. d. Taylerrule

$$f(x + \Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x) (\Delta x)^n = c_0 + c_1 \Delta x + c_2 (\Delta x)^2 + \dots$$

gesucht:  $c_n = ?$

$$f(x + \Delta x) \Big|_{\Delta x \rightarrow 0} = c_0 = f(x)$$

$$\frac{d}{d(\Delta x)} f(x + \Delta x) \Big|_{\Delta x \rightarrow 0} = 1 \cdot c_1 = f'(x)$$

$$\frac{d^2}{d(\Delta x)^2} f(x + \Delta x) \Big|_{\Delta x \rightarrow 0} = 1 \cdot 2 \cdot c_2 = f''(x)$$

ohne weitere Beding:  $f^{(n)}(x) = n! \cdot c_n \rightarrow c_n = \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \checkmark$

b) Erste Term d. Taylorreihe f. mehrdimensional skalar Felder

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi(x, y, z, t)$$

$$\phi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, t + \Delta t) \quad \left. \begin{array}{l} \text{1. Ordng. d. Taylorreihe} \\ \text{in allen Variable} \end{array} \right\} =$$

$$\phi(x, y, z, t) + \Delta x \frac{d}{dx} \phi(x, y, z, t) + \Delta y \frac{d}{dy} \phi(x, y, z, t) + \Delta z \frac{d}{dz} \phi(x, y, z, t) + \Delta t \frac{d}{dt} \phi(x, y, z, t)$$

partielle Ableitung definiert zu Unterscheidung:

$$\frac{d}{dx} \phi(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, y, z, t) = \partial_x \phi(\dots) = \partial_1 \phi(x, \dots)$$

Analog Zeit  $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \partial_t$  ,  $\frac{\partial}{\partial x_i} \rightarrow \partial_{x_i} \rightarrow \partial_i$

$$\Delta x_i \rightarrow dx_i, \quad \Delta t \rightarrow dt$$

$$d\phi(\vec{r}, t) = dx \partial_x \phi + dy \partial_y \phi + dz \partial_z \phi + dt \partial_t \phi$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \phi}_{d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \phi} + dt \partial_t \phi$$

c) Nabla operator

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} = \sum_i \vec{e}_i \partial_i$$

Funktion d. Nabla operator:

$$\text{grad } \phi = \vec{\nabla} \phi = \vec{e}_x \partial_x \phi + \vec{e}_y \partial_y \phi + \vec{e}_z \partial_z \phi$$

„Gradient ein skalar Felds“

$\hat{=}$  Vektor

$$\text{div } \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z \hat{=} \text{Zahl}$$

"Quell dichte  
 im Vektorfelds" ↑  
Divergenz

$$\text{rot } \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_y v_z - \partial_z v_y \\ \partial_z v_x - \partial_x v_z \\ \partial_x v_y - \partial_y v_x \end{pmatrix} \hat{=} \text{Vektor}$$

"Wirbel dichte  
 im Vektorfelds"

Charakterisig v. Felds

