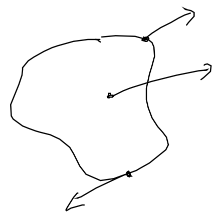
4. Höherdimensionale / Vektorintegration

Integration im Raum: Vektorfeld definiert auf Volumen V

Fläche ∂V (A) umschließt V

Kurve ∂A (K) umschließt Fläche A



Beispiele: (i) Berechnung v. Flächeninhalten und Volumina, Masse ...

Kurvenlängen: „skalare Integrale"

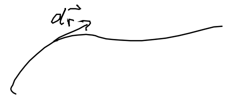
(ii) Berechnung von gerichteten Größen: Arbeit (Skalar)

(iii) Fluss eines Felds d. Oberfläche

$\Big\}$ „Vektorintegrale"

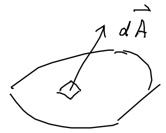
statt über dx zu integrieren:

a) über Kurvenstücke:



mit gerichtetem Längenelement $d\vec{r}$ / oder Betrag $|d\vec{r}|$

b) über Flächenstücke:



mit gerichtetem Oberflächenelement $d\vec{A}$ / oder Betrag dA

c) über Volumenstück:

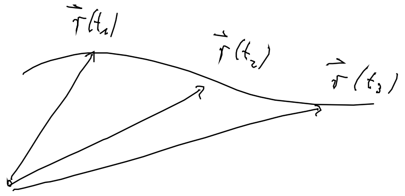
mit Betrag d. Volumenelements dV

4.1. Kurvenintegrale

a) Darstellung einer Kurve im Raum

Kurven im Raum können analog zu Bahnkurven dargestellt werden

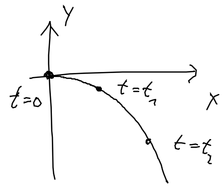
Zeiger: $\vec r = \vec r(t)$



bildet Parametrisierung v. Bahnkurve $\big(x(t),\ y(t),\ z(t)\big)$

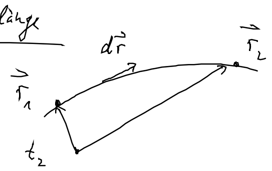
t: Parameter

Beispiel Wurfparabel



$$\vec r(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} v_0 t \\ -\frac{1}{2} g t^2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Parametrisierung in } t}$$

b) Kurvenlänge



s: Weg entlang der Bahn, mit $\vec r = \vec r(t)$

$$\frac{d\vec r}{dt} = \vec v(t) \quad \Rightarrow \quad d\vec r = \vec v(t)\, dt$$

$$|d\vec r| = dr = |\vec v(t)|\, dt = v(t)\, dt$$

$$s = \int_{\vec r_1}^{\vec r_2} dr = \int_{t_1}^{t_2} dt\, v(t)$$

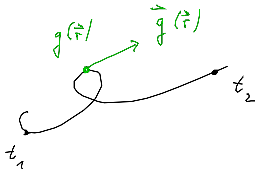
$$= \int_{t_1}^{t} dt \sqrt{\dot x^2(t) + \dot y^2(t) + \dot z^2(t)}\,, \quad \text{mit gegebenen } \dot x_i(t)$$

Beispiel:

$$s_{\text{parabel}} = \int dr = \left| \begin{matrix} \vec r = \begin{pmatrix} v_0 t \\ -\frac{1}{2} g t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \dot{\vec r} = \begin{pmatrix} v_0 \\ -g t \\ 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \right| = \underset{\uparrow \text{ vom Start bis } t}{\int_0^t} dt' \sqrt{v_0^2 + g^2 t'^2 + 0} = \text{Standard-integral}$$

c) allgemeines Kurvenintegral

Funktion $\overset{(\rightarrow)}{g}(\vec r)$



Kurvenintegral über:

$\int dr\, g(\vec r)$, $\int d\vec r \cdot \vec g(\vec r)$, $\int d\vec r \times \vec g(\vec r)$, …

Massendichte — Arbeit entlang K — Wirbel entlang K

allgemeine Formel:

$$\int_{\vec r_1}^{\vec r_2} d\vec r \cdot \overset{(\rightarrow)}{g}(\vec r) = \int \frac{d\vec r}{dt}\, dt \cdot \overset{(\rightarrow)}{g}(\vec r) = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \dot{\vec r}(t) \cdot \overset{(\rightarrow)}{g}(\vec r(t))$$

Rechenzeichen

$d\vec r = \vec v(t)\, dt$

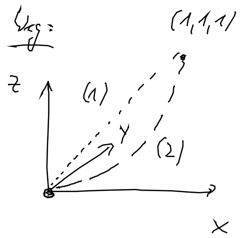
ist auf bekannte Integrationsformel über t rückgeführt

__Beispiel:__ $\vec g = \vec f = (yz, xz, xy)\,\frac{N}{m^2}$ als Kraft, x, y, z: Längeneinheiten

Kurvenintegral über Kraft ~ Arbeit:

$$\int_{\vec r_1}^{\vec r_2} d\vec r \cdot \vec f(\vec r) = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \underline{\underline{\frac{d\vec r(t)}{dt}}} \cdot \underbrace{\vec f(\vec r(t))}$$

__Weg:__



2 Wege als __Bsp.__

$$\vec r_{(1)} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} m = \begin{pmatrix} x_{(1)} \\ y_{(1)} \\ z_{(1)} \end{pmatrix} \qquad \vec r_{(2)}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^2 \end{pmatrix} m$$

t von 0 bis 1

__1. Weg:__

$$\int_0^1 dt\, \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} y(t)\, z(t) \\ x(t)\, z(t) \\ x(t)\, y(t) \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}} m \cdot \frac{N}{m^2} = \int_0^1 dt\, (t^2 + t^2 + t^2)\; Nm$$

$$= \underline{\underline{1\, Nm}}$$

__2. Weg:__ (zu Hause) ergibt auch 1 Nm.

In diesem speziellen Fall ist das Wegintegral $\int d\vec r \cdot \vec g$ unabhängig vom Weg.

Bemerkungen

a) Wegunabhängigkeit d. Integrals ist gegeben f. Potentialfelder

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$$

b) warum? $K = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r}\cdot\vec{g}(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \underbrace{d\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\phi(\vec{r})}_{d\phi} = -\int_{\phi(\vec{r}_1)}^{\phi(\vec{r}_2)} d\phi = \phi(\vec{r}_1)-\phi(\vec{r}_2)$

→ Der Wert d. Integrals hängt lediglich von der Differenz der Werte $\phi(\vec{r}_1)$, $\phi(\vec{r}_2)$ ab

und nicht vom Weg

c) Test ob Feld Gradientenfeld ist:

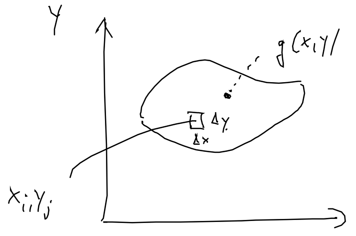
$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\phi \qquad \Big|\, \vec{\nabla}\times$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{g} = -\underbrace{\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}}\phi) \overset{\text{immer}}{=} 0$$

→ Berechne $\vec{\nabla}\times\vec{g}$ und prüfe ob Null. // (i.a.)

4.2. Flächenintegrale

a) Fläche in Ebene d. kartesischen System



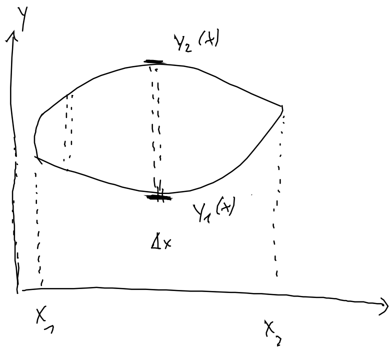
Fragestellung: Flächeninhalte

Integrale über Dichte $g(x,y)$

$$F = \iint dA\, g(x,y) = \underbrace{\sum_{ij} \Delta x\, \Delta y\, g(x_i, y_j)}_{i,j\, \in\, \text{Fläche}}$$

$$= \underbrace{\sum_i \Delta x}\ \underbrace{\sum_j \Delta y\, g(x_i, y_j)}_{x_i \text{ festhalten}}$$

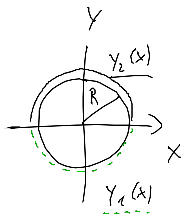
$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\, g(x,y)$$



<u>Beispiel</u> <u>Kreisfläche:</u>

$g = 1$

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\, 1 = \int_{x_1}^{x_2} dx\, \left(y_2(x) - y_1(x) \right)$$



$$= \int_{-R}^{R} dx \left[(R^2 - x^2)^{1/2} + (R^2 - x^2)^{1/2} \right]$$

$$= 2R \int_{-R}^{R} dx \left(1 - \frac{x^2}{R^2} \right)^{1/2}$$

Kreis: $R^2 = x^2 + y^2$

$y = \pm (R^2 - x^2)^{1/2}$

$+ : y_2$, $- : y_1$

<u>1. Substitution:</u> $x' = \frac{x}{R}$ x': keine Einheit

$$\frac{dx'}{dx} = \frac{1}{R} \rightarrow dx = R\, dx'$$

Grenzen: $x = R \rightarrow x' = 1$

$x = -R \rightarrow x' = -1$

$$= 2R^2 \int_{-1}^{1} dx' \left(1 - x'^2 \right)^{1/2}$$

2. Substitution

$x' = \sin\varphi$, wisse: $1 = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi$

$\frac{dx'}{d\varphi} = \cos\varphi$, Grenzen: $1 \to \frac{\pi}{2}$, $-1 \to \frac{\pi}{2}$

$$= \underbrace{2R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos^2\varphi}_{\text{nachschlagen}} = 2R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{1}{4}\left(e^{+i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)^2 =$$

$$= 2R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{1}{4} \left(\underbrace{e^{i2\varphi}}_{=0} + 2 + \underbrace{e^{-i2\varphi}}_{=0}\right)$$ beim Integrieren

$$= \pi R^2$$

b) Darstellung v. Flächen im Raum

Parametrisierung v. Flächen:

$\vec{r}(t)$: Kurve

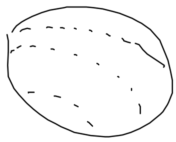
$\vec{r}(t_1, t_2)$: Fläche , benötigt 2 Parameter: (s,t) , (u,v)

Beispiel: Kugeloberfläche $\vec{r}(\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\sin\vartheta \\ R\sin\varphi\sin\vartheta \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix}$

oder allgemeiner: $\vec{r}(\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} x(\vartheta,\varphi) \\ y(\vartheta,\varphi) \\ z(\vartheta,\varphi) \end{pmatrix}$

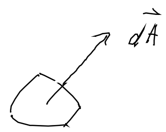
c) Oberflächenintegral im Raum

„gewölbte" Fläche im Raum, allgemeine Formulierung:



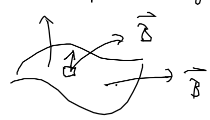
$$\int d\vec{A} \cdot \vec{g}$$

Rechenzeichen



$d\vec{A}$: Flächenelement am Ort $\vec{r}$, mit Betrag d. Fläche und der Richtg. nach „außen"

Bsp: $\int_A d\vec{A} \cdot \vec{B}(\vec{r})$ Fluß d. Magnetfeld $\vec{B}$ durch A



Berechng d. Flächenelemente:

krummlinige Koordinaten: $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv$$

analog zu: $d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} dy = \vec{e}_x dx + \vec{e}_y dy$

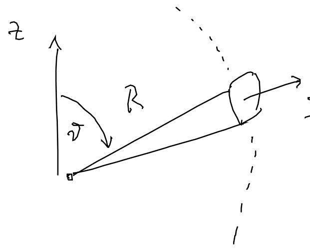
finden wir: $\underset{\text{kartesisch}}{d\vec{A}} = \vec{e}_z \, dx\, dy = \vec{e}_x dx \times \vec{e}_y dy$, $|d\vec{A}| = dx\, dy$

$$\underset{\text{krummlinig}}{d\vec{A}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv, \quad |d\vec{A}| = \underbrace{g_u g_v}_{\text{metrische Koeffizienten}} du\, dv$$

Beispiele: (i) Oberflächenelement in Kugelkoordinaten:

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}$ berechnet (HA)

$$d\vec{A} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\, d\vartheta\, d\varphi = R^2 \sin\vartheta\, \vec{e}_r\, d\vartheta\, d\varphi$$



$\vec{e}_r$ $\quad |d\vec{A}| = R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$