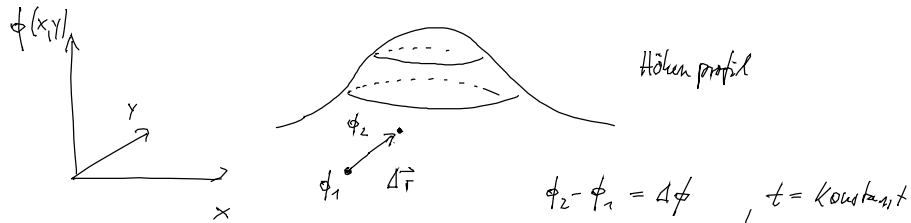


2.2. Konkrete Nablaoperationen: Felder haben Charakter!

2.2.1. Gradient eines skalaren Felds: Ausstieg bei \vec{r}

ϕ sei skalares Feld, hier zweidimensionale Variable



ein mögliche Orientierung ist Ausstieg Felds bei $\vec{r} + \vec{\Delta r}$:
Änderung

$$\Delta \phi = \phi_2 - \phi_1 = \phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_1, y_1, z_1) = \text{kleine Änderung} =$$

$$= \phi(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y, z_1 + \Delta z) - \phi(x_1, y_1, z_1) \quad , \quad \text{1. Ordng. Taylor}$$

$$d\phi = \frac{\partial}{\partial x} \phi(\vec{r}) dx + \frac{\partial}{\partial y} \phi(\vec{r}) dy + \frac{\partial}{\partial z} \phi(\vec{r}) dz$$

$$= \vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{r} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \phi \cdot d\vec{r} \quad \text{„Vektorgradient“}$$

$$\text{Nablaoperator: } \vec{\nabla} = \vec{e}_x \partial_x + \vec{e}_y \partial_y + \vec{e}_z \partial_z = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} = \sum_i \vec{e}_i \partial_i$$

Bemerkung: $d\phi = \vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{r}$
↑ für vorgegeben ↖ gerichtetes Wegstück

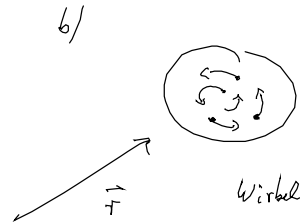
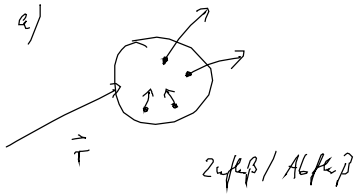


a) wann ist $d\phi$ am größten? wenn $\vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{r} = \text{maximal}$ (Skalarprodukt!)
 das stärkste Ausstieg $d\phi$ entlang $\Delta \vec{r}$ führt immer entlang $\vec{\nabla} \phi$.

b) entlang Äquipotentialfläche (Höhenlinie), dh $d\phi = 0$
 $\nabla\phi \cdot d\vec{r} = 0$: $\nabla\phi$ steht \perp auf Äquipotentialfläche

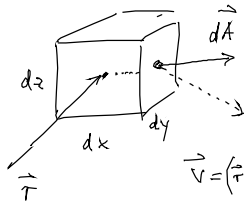
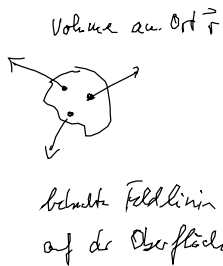
2.2.2. Charakter von Vektorfeldern

Abhänger v. z.B. geometrische Eigenschaften



Welche Mass kann man f. a/b einführen

a) Quellendichte $\text{div } \vec{v} \equiv \nabla \cdot \vec{v}$ "Divergenz"



Idee:
 Summe aller Vektoren die durch die Oberfläche aus \vec{r} heraus laufen
 $d\vec{A}$ ist Vektorfläche:
 - Länge $dy dz$
 - Richtung: immer nach außen

genau Def. der Divergenz:

$$\text{div } \vec{v} \equiv \frac{1}{V} \int_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{v}(\vec{r})$$

\uparrow Normierung
 \uparrow Integral über Oberfläche des Volumens, V

> 0 : Feldlinien austreten
 < 0 : Feldlinien vergehen
 $= 0$: keine Quelle

$$= \frac{1}{dx dy dz} \left(\underbrace{V_x \left(x - \frac{dx}{2}, y, z \right)}_{\substack{\text{Vektor auf} \\ \text{links Seite}}} \cdot \underbrace{(-dy dz)}_{\substack{\text{zeigt nach} \\ \text{links außen}}} + V_x \left(x + \frac{dx}{2}, y, z \right) dy dz \right)$$

+ viele 4 Terme ...) gilt 1. Ordnung Taylorreihe

$$= \frac{1}{dx dy dz} \left(\frac{\partial}{\partial x} V_x (x, y, z) \underbrace{dx}_{\text{Taylor}} \underbrace{dy dz}_{dA} + \dots \right)$$

$$= \partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \sum_i \partial_i v_i$$

b) Wirbelstärke $\text{rot } \vec{v}$ "Rotation \vec{v} "



Idee: sammeln alle Vektor-Komponenten auf ∂V um \vec{r}
 sich windenden Feldlinien: \perp Komponente zu $d\vec{A}$ und \vec{v}

$$\text{Def } \text{rot } \vec{v} = \frac{1}{\partial V} \int_{\partial V} d\vec{A} \times \vec{v}(\vec{r}) \left. \begin{array}{l} = 0 \text{ wenn alle Vektoren } \vec{v} \\ \parallel \text{ zu } d\vec{A} \\ \neq 0 \text{ wenn Vektoren unterschiedl.} \\ \perp \text{ zu } d\vec{A} \text{ stehen} \end{array} \right\}$$

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{v} \right)_i = \frac{1}{dx dy dz} \left(\varepsilon_{ijk} (-dA_j) v_k \left(\vec{r} - \frac{dx_j}{z} \vec{e}_j \right) \right.$$

Einfach Summe korrigieren:
über doppelt Zähler
wird summiert

$$\left. + \varepsilon_{ijk} (dA_j) v_k \left(\vec{r} + \frac{dx_j}{z} \vec{e}_j \right) \right), \text{ Taylor}$$

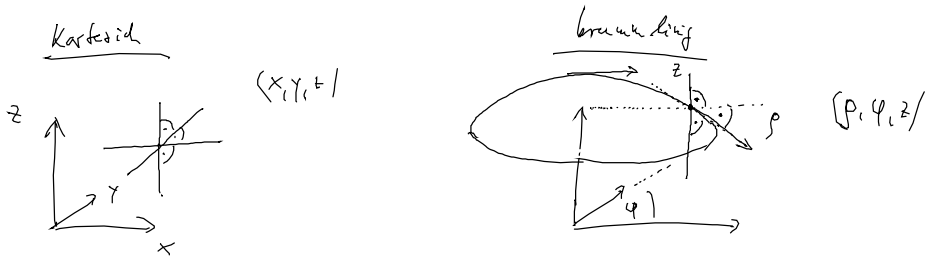
$$= \frac{1}{dx dy dz} \varepsilon_{ijk} \underbrace{dx_i dx_k}_{dA_j} \underbrace{dx_j}_{\text{klein für Taylor}} \partial_j v_k \quad v_k(x_1 + \frac{dx_1}{z}, y_1, z_1)$$

$$= \left(\vec{\nabla} \times \vec{v} \right)_i \quad \checkmark$$

3. Vektorrechnung in orthogonalen krummlinigen Koordinaten

3.1. Orthogonalisierte lokale Dreibein

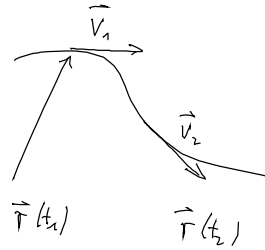
Koordinatenlinien des Koordinatensystems sind
Linien im Raum, die entstehen wenn jeweils 2 Koordinaten festgehalten
werden und die variiert



in jedem der Punkte kann ein System v. orthogonalisierte Einheitsvektoren $\{ \vec{e}_i \}$
gefunden werden: Dreibein

3.2. Konstruktion d. Dreibeins

Eingung: Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}(t)$



Zeit als Parameter

\vec{v} als Tangentialvektor an Bahnkurve

Idee: Statt Zeit die lokale Koordinate variieren

→ Ableitung ist Tangent an Koordinatenlinie, muß noch normiert werden

Krummlinige Koordinte: u, v, w (z.B. φ, ϑ, r), (u_1, u_2, u_3)

$$\vec{e}_u = \frac{\partial \vec{r}(u, v, w)}{\partial u} \quad / \quad \left| \frac{\partial \vec{r}(u, v, w)}{\partial u} \right| \quad \text{analy f. } v, w$$

a) Zylinderkoordinaten:

$$\vec{r} = (x, y, z) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{e}_\rho &\sim \partial_\rho \vec{r} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \\ |\partial_\rho \vec{r}| &= (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)^{1/2} = 1 \end{aligned} \right\} \vec{e}_\rho = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$$

$$\vec{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0), \quad \vec{e}_z = (0, 0, 1)$$

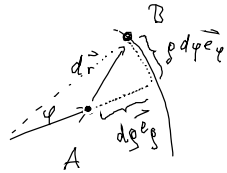
b) Kugelkoordinaten zu Hause

3.3. Nablaoperator und krummlinige Koordinaten

$d\phi = \vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{r}$: Invariant, kann man auch um \vec{r} in krummlinige Koordinaten
zu formulieren $\partial_x \rightarrow \partial_\rho$

$$d\vec{r} = \text{kartesisch} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z \quad \text{einfach}$$

Bsp. Kurvenlinie:



φ-Linie

$$d\vec{r} = d\rho \vec{e}_\rho + \underbrace{\rho d\varphi}_{\text{Bogenlänge}} \vec{e}_\varphi \neq d\rho \vec{e}_\rho + d\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$\text{d.h.: } d\vec{r} = du g_u \vec{e}_u + dv g_v \vec{e}_v + dw g_w \vec{e}_w$$

g_i : "metrische Koeffizienten"

Bewegung entlang der Koordinatenlinie um $d\vec{r}$ umschreiben

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv + \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} dw$$

$$= \vec{e}_u g_u du + \vec{e}_v g_v dv + \vec{e}_w g_w dw$$

$$\text{metrische Koeffizienten: } g_u = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right|^2 \quad \text{analog } v, w$$

Nablaoperator in krummlinigen Koordinaten

$$d\phi = \text{Zunahme} = \partial_u \phi du + \partial_v \phi dv + \partial_w \phi dw$$

$$= \underbrace{\partial_u \phi}_{1} \underbrace{\vec{e}_u \cdot \vec{e}_u}_{g_u} du \underbrace{\frac{g_u}{1}}_{1} + \dots \text{ analog } \dots$$

$$= \underbrace{g_u^{-1} \vec{e}_u}_{\vec{\nabla} \text{ Operator}} \partial_u \phi \cdot \underbrace{\vec{e}_u g_u}_{\text{u Kompakte d. Vektorfeldes in 21 Richtg.}} du + \dots \text{ analog } \dots +$$

$$\downarrow \quad \vec{\nabla} = \vec{e}_u g_u^{-1} \partial_u + \vec{e}_v g_v^{-1} \partial_v + \vec{e}_w g_w^{-1} \partial_w = \sum_{u=1}^3 \vec{e}_u g_u^{-1} \partial_u$$

a) kartesisch: $\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i} \right| = g_i = 1$

b) Zylinder: $\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right| = 1$, $\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = \rho$, $\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right| = 1$

c) Kugel: $\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| = 1$, $\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} \right| = r$, $\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = r \sin \vartheta$

$$\vec{\nabla} \Big|_{\text{Zylinder}} = \vec{e}_\rho \partial_\rho + \frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi \partial_\varphi + \vec{e}_z \partial_z$$

$$\vec{\nabla} \Big|_{\text{Kugel}} = \vec{e}_r \partial_r + \frac{1}{r} \vec{e}_\vartheta \partial_\vartheta + \frac{\vec{e}_\varphi}{r \sin \vartheta} \partial_\varphi$$

Beispiel: $\vec{v} = v_0 \vec{e}_\varphi$




$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \left(\vec{e}_\rho \partial_\rho + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \partial_\varphi + \vec{e}_z \partial_z \right) \times v_0 \vec{e}_\varphi$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_0 \quad \underbrace{\hspace{10em}}_0$

$$\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \frac{\vec{e}_\varphi}{\rho} \times \partial_\varphi v_0 \vec{e}_\varphi = \frac{v_0}{\rho} \vec{e}_z$$



zu Hause