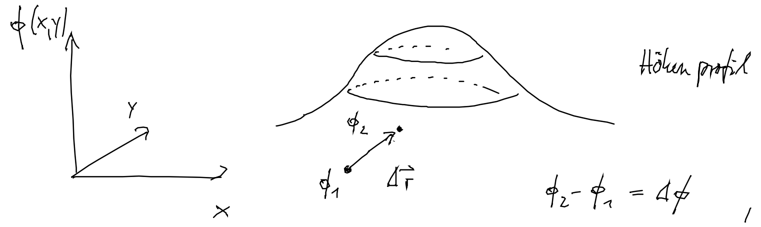
2.2. Konkrete Nablaoperationen: Felder haben Charakter!

2.2.1. Gradient eines skalaren Felds: Anstieg bei $\vec{r}$

ϕ sei skalares Feld, hier zweidimensionale Variable



$\phi_2-\phi_1=\Delta\phi$, $t=$ konstant

Änderung/

eine mögliche Charakterisierung ist Anstieg Felds bei $\vec{r}+\Delta\vec{r}$:

$$\Delta\phi=\phi_2-\phi_1=\phi(x_2,y_2,z_2)-\phi(x_1,y_1,z_1)=\text{Kleine Änderung}=$$

$$=\phi(x_1+\Delta x, y_1+\Delta y, z_1+\Delta z)-\phi(x_1,y_1,z_1) \quad , \text{ 1. Ordg. Taylor}$$

$$d\phi=\frac{\partial}{\partial x}\phi(\vec{r})\,dx+\frac{\partial}{\partial y}\phi(\vec{r})\,dy+\frac{\partial}{\partial z}\phi(\vec{r})\,dz$$

$$=\underline{\underline{\vec{\nabla}\phi\cdot d\vec{r}}}=\underline{\underline{\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\phi\cdot d\vec{r}}} \quad \text{„Vektorgradient“}$$

Nablaoperator: $$\vec{\nabla}=\vec{e}_x\partial_x+\vec{e}_y\partial_y+\vec{e}_z\partial_z=\begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}=\sum_i\vec{e}_i\partial_i$$

<u>Bemerkungen</u>: $$\underbrace{d\phi=\underset{\text{fest vorgegeben}}{\vec{\nabla}\phi}\cdot\overset{\text{gerichtetes Wegelement}}{d\vec{r}}}_{\text{erzeugen } d\phi}$$

a) wann ist $d\phi$ am größten? wenn $\vec{\nabla}\phi\cdot d\vec{r}=$ maximal (Skalarprodukt!)
der stärkste Anstieg $d\phi$ entlang $\Delta\vec{r}$ führt immer entlang $\vec{\nabla}\phi$.

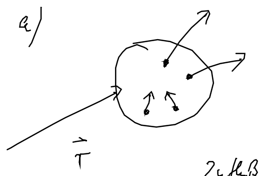
b) entlang Äquifunktionalflächen (Höhenlinien), d.h. $d\phi = 0$

$\Rightarrow \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r} = 0$: $\vec{\nabla}\phi$ steht $\perp$ auf Äquifunktionalflächen

2.2.2. Charakter von Vektorfeldern

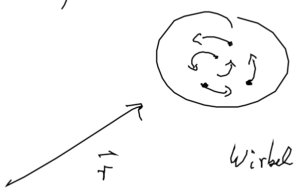
Abfragen v. z.B. Geschwindigkeitsfeldern

a)



Zufluß / Abfluß

b)

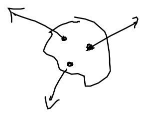


Wirbel

welche Maße kann man f. a/b einführen

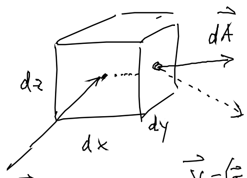
a) Quelldichte $\quad \mathrm{div}\,\vec{v} \equiv \vec{\nabla}\cdot\vec{v} \quad$ „Divergenz"

Volumen am Ort $\vec{r}$



betrachte Feldlinien auf der Oberfläche

:



$\vec{v} = (\vec{r} + \frac{dx}{2} e_x)$

Idee: sammeln alle Vektoren die durch die Oberfläche am $\vec{r}$ heraus laufen

$d\vec{A}$ ist Vektorfläche:

- Länge $dy\,dz$
- Richtg: immer nach außen

genaue Def. der Divergenz:

$$\mathrm{div}\,\vec{v} \equiv \frac{1}{V} \int_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{v}(\vec{r})$$

Normierung

Integral über Oberfläche des Volumens, V

> 0 : Feldlinien entstehen

< 0 : Feldlinien vergehen

$= 0$: Keine Quelle

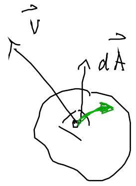
$$= \frac{1}{dx\,dy\,dz}\Big(\underbrace{V_x\left(x-\frac{dx}{2},y,z\right)}_{\text{Vektor auf linker Seite}} \cdot \underbrace{(-dy\,dz)}_{\text{zeigt nach links außen}} + V_x\left(x+\frac{dx}{2},y,z\right) dy\,dz$$

$$+ \text{ weitere 4 Terme } \dots \Big)$$ jetzt 1. Ordnung Taylorreihe

$$= \frac{1}{dx\,dy\,dz}\left(\frac{\partial}{\partial x} V_x(x,y,z) \underbrace{dx}_{\text{Taylor}} \underbrace{dy\,dz}_{dA} + \dots \right)$$

$$= \partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \sum_i \partial_i v_i$$

b) <u>Wirbeldichte</u> rot $\vec{v}$ „Rotation $\vec{v}$"



Anteil der sich auf ∂V bewegt

<u>Idee:</u> sammeln alle Vektorkomponenten auf ∂V um $\vec{r}$ sich windenden Feldlinie : $\perp$ Komponente zu $d\vec{A}$ und $\vec{v}$

<u>Def</u> $$\text{rot}\,\vec{v} = \frac{1}{V}\int_{\partial V} d\vec{A} \times \vec{v}(\vec{r}) \quad \begin{cases} = 0 & \text{wenn alle Vektoren } \vec{v} \parallel \text{ zu } d\vec{A} \\ \neq 0 & \text{wenn Vektoren anteil } \perp \text{ zu } d\vec{A} \text{ stehen} \end{cases}$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{v})_i = \frac{1}{dx\,dy\,dz}\Big(\varepsilon_{ijk}(-dA_j)V_k\big(\vec{r}-\frac{dx_j}{2}\vec{e}_j\big)$$

Einstein Summenkonvention: über doppelte Indices wird summiert

$$+\ \varepsilon_{ijk}(dA_j)V_k\big(\vec{r}+\frac{dx_j}{2}\vec{e}_j\big)\Big)$$, Taylor

$$= \frac{1}{dx\,dy\,dz}\,\varepsilon_{ijk}\underbrace{dx_i\,dx_k}_{dA_j}\underbrace{dx_j}_{\text{Kleine Größe bei Taylor}}\ \partial_j V_k$$

$V_k(x_1+\frac{dx_1}{2}, y_1, z_1)$

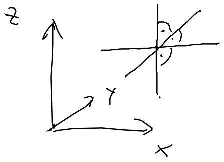
$$= (\vec{\nabla}\times\vec{v})_i$$ ✓

3. Vektorrechnen in orthogonalen krummlinigen Koordinaten

3.1. Orthonormierte lokale Dreibein

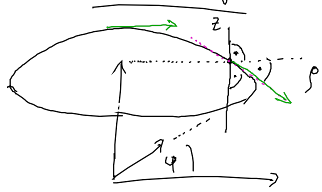
Koordinatenlinien eines Koordinatensystems sind Linien im Raum, die entstehen wenn jeweils 2 Koordinaten festgehalten werden und eine variiert

Kartesisch



(x, y, z)

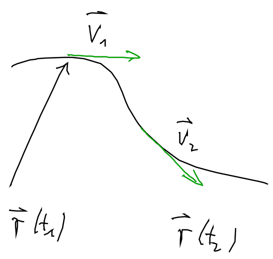
krummlinig



(ρ, φ, z)

in jedem der Punkte kann ein System v. orthonormierten Einheitsvektoren $\{\vec{e}_i\}$ gefunden werden: Dreibein

3.2. Konstruktion d. Dreibeins



Erinnerung: Geschwindigkeit $\dot{\vec r}(t)$

Zeit als Parameter

$\vec v$ als Tangentialvektor a. Bahnkurve

Idee: statt Zeit die einzelnen Koordinaten variieren

$\longrightarrow$ Ableitg. ist Tangente an Koordinatenlinie, muß noch normiert werden

krummlinige Koordinaten: u, v, w (z.B. φ, ϑ, r), (u_1, u_2, u_3)

$$\vec e_u = \frac{\partial \vec r(u,v,w)}{\partial u} \Big/ \left| \frac{\partial \vec r(u,v,w)}{\partial u} \right| \quad \text{analog f. } v, w$$

a) Zylinderkoordinaten:

$$\vec r = (x, y, z) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$$

$$\left.\begin{aligned} \vec e_\rho &\sim \partial_\rho \vec r = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \\ |\partial_\rho \vec r| &= (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)^{1/2} = 1 \end{aligned}\right\} \quad \vec e_\rho = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$$

$$\vec e_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \quad \vec e_z = (0, 0, 1)$$

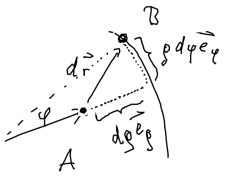
b) Kugelkoordinaten zu Hause

3.3. Nablaoperator und krummlinige Koordinaten

$d\phi = \vec\nabla\phi \cdot d\vec r$: Invariante, kann man nutzen um $\vec\nabla$ in krummlinige Koordinaten zu formulieren $\partial_x \rightsquigarrow \partial_\rho$

$d\vec r$ = kartesisch = $dx\,\vec e_x + dy\,\vec e_y + dz\,\vec e_z$ einfach

Bsp. krummlinig:



..... ρ-Linie

$$d\vec r = d\rho\, \vec e_\rho + \underbrace{\rho\, d\varphi}_{\text{Bogenmass}}\, \vec e_\varphi \neq d\rho\, \vec e_\rho + d\varphi\, \vec e_\varphi$$

dh: $d\vec r = du\, g_u \vec e_u + dv\, g_v \vec e_v + dw\, g_w \vec e_w$

g_i : „metrische Koeffizienten"

Bewegung entlang der Koordinatenlinien um $d\vec r$ zurückzulegen

$$d\vec r = \underbrace{\frac{\partial \vec r}{\partial u}}\, du + \frac{\partial \vec r}{\partial v}\, dv + \frac{\partial \vec r}{\partial w}\, dw$$

$$= \vec e_u\, g_u\, du + \vec e_v\, g_v\, dv + \vec e_w\, g_w\, dw$$

metrische Koeffizienten: $g_u = \left| \frac{\partial \vec r}{\partial u} \right|$ analog v, w

Nablaoperator in krummlinigen Koordinaten.

$$d\phi = \text{Invariante} = \partial_u \phi\, du + \partial_v \phi\, dv + \partial_w \phi\, dw$$

$$= \partial_u \phi\, \underbrace{\vec e_u \cdot \vec e_u}_{1}\, du\, \underbrace{\frac{g_u}{g_u}}_{1} + \ldots \text{ analog } \ldots$$

$$= \underbrace{g_u^{-1}\, \vec e_u\, \partial_u \phi}_{\substack{u\text{ Komponente d.} \\ \vec\nabla\text{ Operators}}} \cdot \underbrace{\vec e_u\, g_u\, du}_{\substack{u\text{ Komponente d.} \\ \text{Wegstücks in } u\text{ Richtung}}} + \ldots \text{ analog } \ldots +$$

$\Downarrow$

$$\vec\nabla = \vec e_u\, g_u^{-1}\, \partial_u + \vec e_v\, g_v^{-1}\, \partial_v + \vec e_w\, g_w^{-1}\, \partial_w = \sum_{u=1}^{3} \vec e_u\, g_u^{-1}\, \partial_u$$

a) kartesisch: $\left|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial x_i}\right| = g_i = 1$

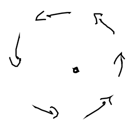
b) Zylinder: $\left|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}\right| = 1 \quad , \left|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right| = \rho \; , \quad \left|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial z}\right| = 1$

c) Kugel: $\left|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial r}\right| = 1 \quad , \left|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta}\right| = r \quad , \left|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right| = r \sin\vartheta$

$$\vec{\nabla}\Big|_{\text{Zylinder}} = \vec{e}_\rho\, \partial_\rho + \frac{1}{\rho}\vec{e}_\varphi\, \partial_\varphi + \vec{e}_z\, \partial_z$$

$$\vec{\nabla}\Big|_{\text{Kugel}} = \vec{e}_r\, \partial_r + \frac{1}{r}\vec{e}_\vartheta\, \partial_\vartheta + \frac{\vec{e}_\varphi}{r\sin\vartheta}\, \partial_\varphi$$

<u>Beispiel</u>: $\vec{v} = v_0\, \vec{e}_\varphi$



$$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \Big(\underbrace{\vec{e}_\rho\, \partial_\rho}_{0} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho}\, \partial_\varphi + \underbrace{\vec{e}_z\, \partial_z}_{0}\Big) \times v_0\, \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \frac{\vec{e}_\varphi}{\rho} \times \partial_\varphi\, v_0\, \vec{e}_\varphi = \frac{v_0}{\rho}\, \vec{e}_z$$

zu Hause