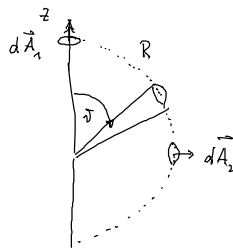


Flächenelement $\vec{dA} = R^2 \sin\vartheta \vec{e}_r d\varphi d\vartheta$
 f. Kugelkoordinaten:



(ii) dA_1 und dA_2 berechnen für
 Integral über eine kreisförmige Fläche

$$dA_1 = R^2 \vartheta d\varphi d\vartheta$$

$$dA_2 = R^2 d\varphi d\vartheta$$

$$\int_{A_1} dA_1 = R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\varepsilon} d\vartheta \vartheta = R^2 2\pi \frac{\vartheta^2}{2} \Big|_0^{\varepsilon} = R^2 \underline{\underline{\pi \varepsilon^2}}$$

A_1 über Kreis mit Radius ε

$$\int_{A_2} dA_2 = R^2 \int d\varphi \int d\vartheta = R^2 \underline{\underline{\pi \varepsilon^2}}$$

A_2 über Kreis mit Radius ε

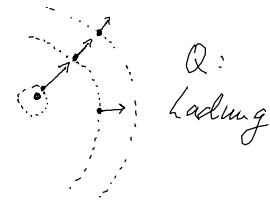
(iii) Oberfläche einer Viertelkugel

$$\int_{\text{Viertelkugel}} dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{\pi} d\varphi \sin\vartheta R^2 = R^2 \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \sin\vartheta = \pi R^2$$

(iv) Fluss durch Kugeloberfläche bei vorgegebenem Feld

elektrisches Feld Punktladung (Ursprung)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$



$$\begin{aligned} \int_{\text{Kugel } R} \underbrace{d\vec{A}}_{\text{auf Kugel}} \cdot \underbrace{\vec{E}(\vec{r})}_{\text{auf Kugel}} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta R^2 \vec{e}_r \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{e}_r \\ &= \underbrace{2\pi}_1 \underbrace{2}_2 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Fluss ist Maß f. eingeschlossene Ladung Q

intuitives Erschließen einer Maxwellgleichung:

$$\frac{1}{V} \int d\vec{A} \cdot \vec{E} = \frac{Q}{V\epsilon_0}$$

↑
Kugel $V \rightarrow 0$, $Q \rightarrow 0$, Radius zusammenziehen

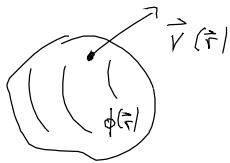
$$\text{Grenzfall } \rho_c \equiv \text{Ladungsdichte} = \frac{Q}{V} = \text{endlich}$$

$$\text{div } \vec{E} = \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_c}{\epsilon_0}}$$

Ladungsdichte ρ_c bestimmt die Quellen d. elektrisch Felds

4.3. Volumenintegrale

a) Dreidimensionale Integrale in kartesischen Koordinaten



Volumenintegral auf \$V\$.

Mit Vektorfeld \$\vec{V}(\vec{r})\$ oder skalarem Feld \$\phi(\vec{r})\$

Beispiel Ladungsdichte:



in \$dV\$ befindet sich Ladungsmenge \$dQ\$

$$\rho_e(\vec{r}) = \frac{\Delta Q}{\Delta V} \Rightarrow \frac{dQ}{dV}$$

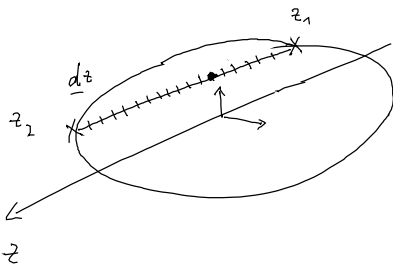
Gesamtladung in Volumen: $Q = \int_V dV \rho_e(\vec{r})$ // Bsp. ϕ

$$\text{mit } Q = \int_V dQ = \int_V dV \frac{dQ}{dV} = \int_V dV \rho_e(\vec{r})$$

allgemeiner Zugang:

$$\left(\iiint \right) \int dV \phi(\vec{r}) = \int d^3r \phi(\vec{r}) = \iiint dx dy dz \phi(x, y, z)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz \phi(x, y, z)$$

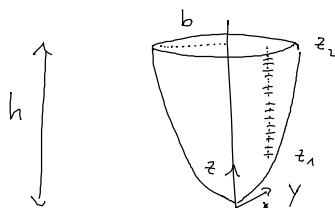


$f(x, y)$: führt Problem auf Flächenintegral zurück

Volumenintegral sind damit auf gewöhnliche Integralen

zurückgeführt, z.B. 2. Integration mit \$x, y = \text{konstant}\$ ausführen

Bsp: Paraboloid $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$



Fläche (∂V)
parametrisieren

Höhe: h , Radius b

$$\int_{-b}^b dx \int_{-(b^2-x^2)^{1/2}}^{+(b^2-x^2)^{1/2}} dy \int_{z_1}^{z_2} dz \quad \phi(x_1, y_1, z) =$$

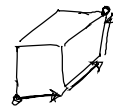
$z_1 = x^2 + y^2$ $z_2 = h$

Flächenintegral $x^2 + y^2 = b^2$, siehe letzte VL

b) Volumenintegrale in krummlinigen Koordinaten

in kartesischen Koordinaten:

$$d\vec{r} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$$



$$dV = dx dy dz$$

in krummlinigen Koordinaten:

Beispiel Kugel: $d\vec{r}$ ist krummliniges Volumenelement

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv + \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} dw \quad \begin{matrix} u & v & w \\ (r, \vartheta, \varphi) \end{matrix}$$

Volumen des krummlinigen Spats:

$$dV = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} du dv dw$$

Beispiel $dV|_{\text{Kugelkoordinaten}} = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$

$$dV | \text{Zylinderkoordinaten} = \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz$$

$$\text{Kugelvolumen: } \int d^3r = \int_0^R dr r^2 \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi}{3} R^3$$

$\underbrace{\quad}_0 \quad \underbrace{\quad}_0 \quad \underbrace{\quad}_0$
 $\frac{1}{3} R^3 \quad 2 \quad 2\pi$

4.4. Zusammenstellung Integraltypen

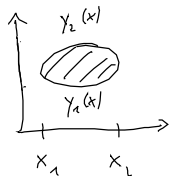
a) gewöhnliches Integral $\int_a^b dx f(x) = \int_a^b dx \frac{dF(x)}{dx} = F(b) - F(a)$

b) Kurvenintegral $\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \quad _ = \left| \begin{array}{l} \text{Parameterdarstellg.} \\ \text{Kurve } \vec{r} = \vec{r}(t) \end{array} \right| = \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{\vec{r}}(t) \quad _$



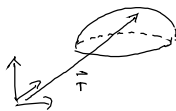
„ — “ Reduziere und Objekt $\in \mathbb{R} \cdot \vec{v}(\vec{r}), \phi(\vec{r}), \chi \vec{v}(\vec{r})$

c) Flächenintegral in Ebene $\int dx \int dy \phi(x,y) = \left| \begin{array}{l} \text{Funktion } f. \\ \text{Begrenzung} \\ \text{Fläche } \end{array} \right| = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \phi(x,y)$



typischer Wert über Zahl oder Vektor in z-Richtung

d) Oberflächenintegrale (gekrümmte Fläche)



$$\int d\vec{A} \quad _ = \left| \begin{array}{l} \text{Parametrisierung} \\ \text{der gekrümmten} \\ \text{Fläche } \vec{r} = \vec{r}(u,v) \end{array} \right| = \iint du dv \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) \quad _$$

e) Volumenintegrale $\int dV \Big|_1 = \left| \begin{array}{l} \text{Grenze in kartesisch} \\ \text{Koordinate} \end{array} \right| = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz \Big|_1$



typischerweise über Zahlen oder Vektoren

$$\int dV \Big|_2 = \left| \begin{array}{l} \text{Volumen in} \\ \text{krummlinige} \\ \text{Koordinate} \end{array} \right| = \int du \int dv \int dw \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}$$

f) Berechnung v. Determinanten

Anordnung von $n \times n$ Zahlen: $|a_{ij}|$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \dots & \\ a_{31} & & & & \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & & & & a_{nn} \end{vmatrix} = |a_{ij}| \equiv \mathcal{D}(\{a_{ij}\})$$

Zuordnung einer Zahl: „Determinante“

folgendes Vorgehen:

Startpunkt: $|a_{11}| \equiv \mathcal{D}(a_{11}) = a_{11}$ f. 1. Zeile

$n > 1$: Start mit oberer Zeile und alternierendes Vorzeichen für alle Zeilen eintragen und multiplizieren mit Unterdeterminante \mathcal{D}_{1j} :

$$\mathcal{D}(a_{ij}) = a_{11} \mathcal{D}_{11} - a_{12} \mathcal{D}_{12} + a_{13} \mathcal{D}_{13} - \dots$$

\mathcal{D}_{1j} ist dabei die Determinante die durch Streichen der 1. Zeile und j -te Spalte entsteht.

Regel solange anwende bis nur Zahl als Minor determinante erhalten

Beispiel:

$$2 \times 2: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$$3 \times 3: \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$