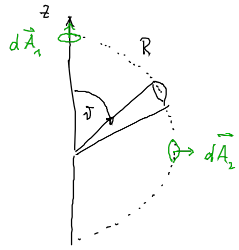
Flächenelement f. Kugelkoordinaten: $d\vec{A} = R^2 \sin\vartheta \, \vec{e}_r \, d\varphi \, d\vartheta$



(ii)

dA_1 und dA_2 berechnen für Integral über eine kleine kreisförmige Fläche

$$dA_1 = R^2 \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta$$

$$dA_2 = R^2 \, d\varphi \, d\vartheta$$

$$\int\limits_{\substack{A_1 \text{ über} \\ \text{Kreis mit Radius } \varepsilon}} dA_1 = R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\varepsilon} d\vartheta \, \vartheta = R^2 \, 2\pi \, \frac{\vartheta^2}{2}\Big|_0^{\varepsilon} = \underline{\underline{R^2 \pi \varepsilon^2}}$$

$$\int\limits_{\substack{A_2 \text{ über Kreis mit Radius } \varepsilon}} dA_2 = R^2 \underline{\int d\varphi \int d\vartheta} = R^2 \underline{\pi \varepsilon^2}$$

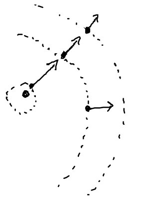
(iii) Oberfläche einer Viertelkugel

$$\int\limits_{\text{Viertelkugel}} dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \underbrace{\int_0^{\pi} d\varphi}_{\pi} \sin\vartheta \, R^2 = R^2 \pi \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \sin\vartheta}_{1} = \pi R^2$$

(iv) Fluss durch Kugeloberfläche bei vorgegebenem Feld

elektrisches Feld Punktladung (Ursprung)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{e}_r$$



Q: Ladung

$$\underbrace{\int}_{\text{Kugel } R \text{ (geschlossen)}} d\vec{A}\cdot \underbrace{\vec{E}(\vec{r})}_{\text{auf Kugel}} = \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}\ \underbrace{\int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta}_{2}\ R^2 \vec{e}_r \cdot \underbrace{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{e}_r}_{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}}$$

$$= 2\pi \quad 2 \quad \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Fluss ist Maß f. eingeschlossene Ladung Q

intuitives Erschließen einer Maxwellgleichung:

$$\frac{1}{V}\int d\vec{A}\cdot\vec{E} = \frac{Q}{V\varepsilon_0}$$

Kugel $\quad V \to 0, \quad Q \to 0$, Radius zusammenziehen

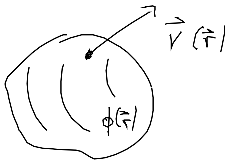
Grenzfall $\rho_e \equiv$ Ladungsdichte $= \frac{Q}{V} =$ endlich

$$\operatorname{div}\vec{E} = \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}}$$

Ladungsdichte ρ_e bestimmt die Quellen d. elektrisch. Felds

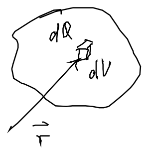
4.3. Volumenintegrale

a) Dreidimensionale Integrale in Kartesischen Koordinaten



Volumenintegral auf V:
mit Vektorfeld $\vec v(\vec r)$ oder skalarem Feld $\phi(\vec r)$

Beispiel Ladungsdichte:



in dV befindet sich Ladungsmenge dQ

$$\rho_e(\vec r) = \frac{\Delta Q}{\Delta V} \Rightarrow \frac{dQ}{dV}$$

Gesamtladung in Volumen: $Q = \int_V dV\, \rho_e(\vec r)$

„Bsp. ϕ"

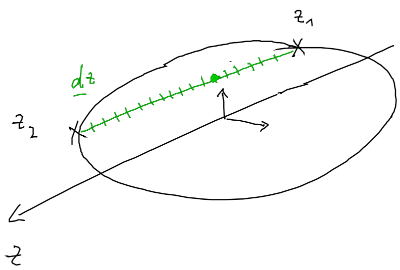
weil $Q = \int_V dQ = \int_V dV \frac{dQ}{dV} = \int_V dV\, \rho_e(\vec r)$

allgemeiner Zugang:

$$\left(\iiint\right)\int dV\, \phi(\vec r) = \int d^3r\, \phi(\vec r) = \iiint dx\, dy\, dz\, \phi(x,y,z)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \underbrace{\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz\, \phi(x,y,z)}_{f(x,y)}$$

$f(x,y)$: führt Problem auf Flächenintegral zurück

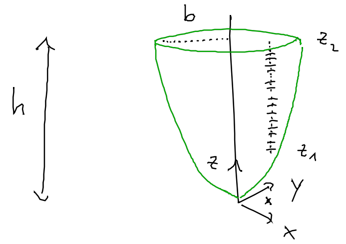


Volumenintegrale sind damit auf gewöhnliche Integration zurückgeführt, z.B. z-Integration mit x, y = Konstant ausführen

Bsp: Paraboloid $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}$

Fläche (∂V) parametrisieren

Höhe: h, Radius b



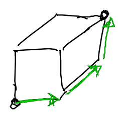
$$\int_{-b}^{b} dx \int_{-(b^2-x^2)^{1/2}}^{+(b^2-x^2)^{1/2}} dy \int_{z_1 = x^2+y^2}^{z_2 = h} dz \; \phi(x,y,z) =$$

Flächenintegral $x^2+y^2 = b^2$, siehe letzte VL

b) Volumenintegrale in krummlinigen Koordinaten

in kartesischen Koordinaten:

$$d\vec{r} = dx\,\vec{e}_x + dy\,\vec{e}_y + dz\,\vec{e}_z$$



$dV = dx\,dy\,dz$

in krummlinigen Koordinaten:

Beispiel Kugel: 

ist krummliniges Volumenelement

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\,du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\,dv + \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\,dw \qquad \overset{u}{(r},\overset{v}{\vartheta},\overset{w}{\varphi)}$$

Volumen des krummlinigen Spats:

$$dV = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\,du\,dv\,dw$$

Beispiel $dV\big|_{\text{Kugelkoordinaten}} = r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr$

$$dV|_{\text{Zylinderkoordinate}} = \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz$$

Kugelvolumen: $$\int d^3 r = \underbrace{\int_0^R dr \, r^2}_{\frac{1}{3}R^3} \underbrace{\int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta}_{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} = \frac{4\pi}{3} R^3$$

4.4. Zusammenstellung Integraltypen

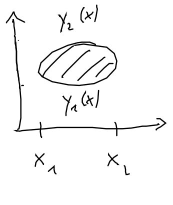
a) gewöhnliches Integral $$\int_a^b dx \, f(x) = \int_a^b dx \, \frac{dF(x)}{dx} = F(b) - F(a)$$

b) Kurvenintegral $$\int_{\vec r_1}^{\vec r_2} d\vec r \, \_\_ = \left| \begin{array}{l} \text{Parameterdarstellg.} \\ \text{Kurve } \vec r = \vec r(t) \end{array} \right| = \int_{t_1}^{t_2} dt \, \dot{\vec r}(t) \, \_\_$$

„ — " Rechenzeichen und Objekt z.B. $\cdot \vec v(\vec r)$, $\phi(\vec r)$, $\times \vec v(\vec r)$

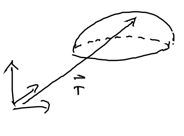
c) Flächenintegrale in Ebene $$\int dx \int dy \, \phi(x,y) = \left| \begin{array}{l} \text{Funktionen f.} \\ \text{Begrenzung} \\ y_i(x) \end{array} \right| = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \, \phi(x,y)$$

(///) Fläche



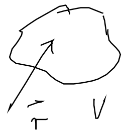
typischerweise über Zahl oder Vektor in z-Richtung

d) Oberflächenintegrale (gekrümmte Fläche)



$$\int d\vec A \, \_\_ = \left| \begin{array}{l} \text{Parametrisierung} \\ \text{der gekrümmten} \\ \text{Fläche } \vec r = \vec r(u,v) \end{array} \right| = \iint du \, dv \left(\frac{\partial \vec r}{\partial u} \times \frac{\partial \vec r}{\partial v} \right) \_\_$$

e) Volumenintegrale $\int\limits_{\text{Volumen}} dV \,\_\_\, \Big|_1 = \Big|$ Grenzen in kartesisch Koordinaten $\Big| = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz \,\_\_$



typischerweise über Zahlen oder Vektoren

$$\int dV \,\_\_\, \Big|_2 = \Big| \text{Volumen in krummlinige Koordinaten} \Big| = \int du \int dv \int dw \left(\frac{\partial \vec r}{\partial u} \times \frac{\partial \vec r}{\partial v}\right) \cdot \frac{\partial \vec r}{\partial w} \,\_\_$$

f) Berechnung v. Determinanten

Anordnung von $n \times n$ Zahlen : $|a_{ij}|$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \ddots & \\ a_{31} & & \ddots & & \\ & \ddots & & & \\ a_{n1} & & & & a_{nn} \end{vmatrix} = |a_{ij}| \equiv D(\{a_{ij}\})$$

Zuordnung einer Zahl: „Determinante"

folgendes Vorgehen:

Startpunkt: $|a_{11}| \equiv D(a_{11}) = a_{11}$ f. 1 Zahl

$n > 1$: Start mit oberer Zeile und alternierendem Vorzeichen für alle Zeileneinträge und multipliziere mit Unterdeterminante D_{1j} :

$$D(a_{ij}) = a_{11} D_{11} - a_{12} D_{12} + a_{13} D_{13} - \ldots$$

D_{1j} ist dabei die Determinante die durch Streichen der 1. Zeile und j-ten Spalte entsteht.

Regel solange anwenden bis nur Zahlen als Unterdeterminanten entstehen

Beispiele:

2×2: $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

3×3: $$\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$