Wh.: partielle DGL: Beispiel $\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)$

1-dimensionale Wellengl.

Schallgeschwindigkeit

Mathemat. Einschub Fourierreihen:

betrachte periodische Funktion (periodisch auf dem Intervall $[-L, L]$)

$$f(x+2L) = f(x)$$

Komplexe Fourierreihe:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi}{L}x}$$

mit $c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} dx\, f(x) e^{-\frac{i\pi n}{L}x}$

falls $f(x)$ reell: $c_{-n} = c_n^*$

Beachte: Die Funktion $e^{\frac{in\pi}{L}x}$ bilden (ebenso wie $\cos(\frac{n\pi}{L}x)$ und $\sin(\frac{n\pi}{L}x)$) die "Basisfunktionen" eines Vektorraums (Funktionenraum)

Analogie

- $f(x) = \sum_n c_n \underbrace{e^{\frac{in\pi}{L}x}}_{\text{Basisfunktion}} \quad \longleftrightarrow \quad y = \sum_{n=1}^{d} y_n \hat{e}_n$

(Basisvektor) Einheitsvektor im d-dimensionalen Raum

Koeffizient

- $c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} dx\, f(x) e^{-\frac{i\pi n}{L}x} \quad \longleftrightarrow \quad y_n = \hat{e}_n \cdot y = \sum_{i=1}^{d} \hat{e}_{n,i}\, y_i$

Projektion; i-te Komponente

$= \langle e_n | y \rangle$ Notation für ein Skalarprodukt

definiere für die Basisfunktion $e^{\frac{in\pi}{L}x}$ ganz analog das Skalarprodukt

$$\langle e_n | e_m \rangle = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} dx\, e_n^*(x)\, e_m(x)$$

$$= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} dx\, e^{\frac{i(m-n)\pi}{L}x}$$

mit $e_n(x) = e^{\frac{in\pi}{L}x}$

$e_m(x) = e^{\frac{im\pi}{L}x}$

– Basisfunktionen sind orthogonal zueinander

$$\langle e_n | e_m \rangle = \delta_{nm} \quad \text{schon gezeigt}$$

- Basisfunktion spannen den Raum auf ("Vollständigkeitsrelation")

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} dx\, f^*(x)\, f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad \text{Parseval'sche Ungleichung}$$

Hier ohne Beweis

$$\left(\text{formal Vollständigkeitsrelation} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |e_n\rangle\langle e_n| = 1 \right)$$

Bemerkung: Weitere Beispiele für orthogonale Basisfunktion sind:
Ebene Wellen, Kugelflächenfunktion, Besselfunktion

III.4. Diffusionsgleichung in einer Dimension

Physikalische Frage:

Wie ändert sich die Konzentration $n(x,t)$ eines Stoffes als Funktion des Ortes und der Zeit (betrachte wieder den eindimensionalen Fall)

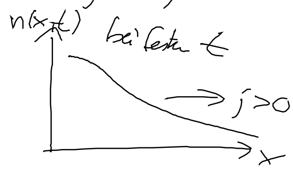
Dimension einer Teilchendichte (hier: Zahl der Teilchen pro Längeneinheit)

Motivation einer geeigneten DGL

i) Räumliche Änderungen von n führen zu einem Materiestrom $j(x,t)$

Ansatz: $$j(x,t) = -D \frac{\partial}{\partial x} n(x,t) \quad (1)$$

Diffusionskoeffizient $(D>0)$



„Fick'sches Gesetz"

ii) Es gibt eine Teilchenzahlerhaltung!

$\Rightarrow$ es gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} n(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x} j(x,t) \quad (2)$$

denn: integriere (2) über Raumintervall

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} n(x,t)\, dx = -\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial}{\partial x} j(x,t)\right) dx$$

vertausche Raumintegrale und zeitl. Ableitung

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} dx\, n(x,t)}_{\text{Gesamtzahl der Teilchen im Raumintervall } [x_1, x_2]} = j(x_1,t) - j(x_2,t)$$

Die Änderung der Gesamtzahl der Teilchen entspricht der Zahl der bei x_1 einfliessenden Teilchen minus Zahl der bei x_2 abfliessenden Teilchen

(normalerweise verschwindet man $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, n(x,t) = \text{const}$

falls $x_1 \to -\infty$

$x_2 \to +\infty$

$\Rightarrow j(-\infty, t) = j(+\infty, t) = 0$

Kombiniere nun (1) und (2)

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} n(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x} \overbrace{\left(-D \frac{\partial}{\partial x} n(x,t)\right)}^{j(x,t)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t} n(x,t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} n(x,t)}$$ Diffusionsgleichung in einer Dimension

mathemat.: Lineare partielle DGL 1. Ordnung in der Zeit, 2. Ordnung im Ort

Lösung: verwende wieder Separationsansatz

$$n(x,t) = Y(x)\, Z(t)$$

Einsetzen ..... $\frac{Z'(t)}{D Z(t)} = \frac{Y''(x)}{Y(x)} = \text{const} = -k^2$

$\Rightarrow$ die Einzelgleichungen sind wieder gewöhnl., lineare DGLs!

Weitere Vorgehensweise analog zu Wellengleichung

Mögliche Anfangs-/Randbedingungen

$n(x, t=0) - n_0 = \cancel{}$ Const   räumlich homogene Konzentration zu Zeit $t=0$

Anfangsbedingung

~~Stab~~ Randbedingungen: z.B. $n(0,t) = 0$, $n(L,t) = 0$ } Diffusion in einem "Stab" endlicher Länge (Länge L)

Für solche Randbed. hat die Lösung wieder die Form einer Entwicklung in "stehende Welle"

man findet: $$n(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{-\frac{m^2\pi^2}{L^2}Dt} \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

mit $c_m = 0$, m gerade

$c_m = \frac{4n_0}{m\pi}$, m ungerade

Betrachte nun den Fall

$$L \longrightarrow \infty$$

III.5. Fouriertransformation und Anwendung auf die Diffusionsgleichung

Frage: Was passiert mit den Ausdrücke für die Fourierreihe für endliche Periodizität L im Limes $L \to \infty$?

Fokus: komplexe Fourierreihe hier

Ausgangspunkt (L endlich)

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi}{L}x}$$ benutze Formel für c_n

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} d\tilde{x}\, f(\tilde{x})\, e^{-\frac{in\pi}{L}\tilde{x}} \right)}_{c_n} e^{\frac{in\pi}{L}x}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} d\tilde{x}\, f(\tilde{x})\, e^{\frac{in\pi}{L}(x-\tilde{x})}$$

Definition: $k_n = \frac{n\pi}{L}$

Abstand zweier aufeinander folgender k_n's

$$k_{n+1} - k_n = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L} = \Delta k$$

$$\Rightarrow \frac{1}{L} = \frac{\Delta k}{\pi}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{\Delta k}{2\pi} \int_{-L}^{L} d\tilde{x}\, f(\tilde{x})\, e^{ik_n(x-\tilde{x})}}_{g(k_n)} \quad (*)$$

Betrachte nun den Limes $L \to \infty$

$\Rightarrow$ Abstand Δk wird immer kleiner

$\Rightarrow$ ersetze die Summe in $(*)$ durch ein Integral

$$\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(k_n)}_{(*)} \longrightarrow \frac{1}{\Delta k} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, g(k)$$

wobei k jetzt eine kontinuierliche Variable ist

Das heißt

$$f(x) \longrightarrow \frac{1}{\cancel{\Delta k}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \overbrace{\frac{\cancel{\Delta k}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x}\, f(\tilde{x})\, e^{ik(x-\tilde{x})}}^{g(k)}$$

$g(k)$ — entspricht $g(k_n)$ wenn k_n in die kontinuierl. Variable k übergeht

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x}\, f(\tilde{x})\, e^{-ik\tilde{x}}$$

Definiere noch: $\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{-ikx}$ Fourier-Transformierte von $f(x)$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \hat{f}(k)\, e^{ikx}}$$

Fourierentwicklung der Funktion $f(x)$

"Hin-Transformation"

mit Koeffizienten

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{-ikx}$$

"Rück-Transformation"

Bemerkungen:

- Der Vorfaktor $\frac{1}{2\pi}$ taucht bei unserer Def. unsymmetr. auf. Das kann man auch "symmetrisieren" (Vorfaktor $\sqrt{\frac{1}{2\pi}}$ sowohl bei der Hin- als auch bei der Rücktransformation)

- Die Funktion $\sim e^{ikx}$ können wieder als Basisfunktion eines Vektorraums aufgefasst werden

Frage: Zugehörige Orthogonalitätsrelation?

Erinnerung bei Fourierreih.

$$\underbrace{\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} dx\, e^{\frac{i(m-n)\pi}{L}x}}_{\langle e_n | e_m \rangle} = \delta_{nm}$$

Kronecker-Delta

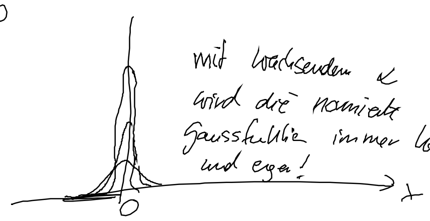
Führe dazu die sogenannte Deltafunktion ein

(Delta-Distribution)

Def.: $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, \delta(x-a) = f(a)$ mit $\delta(x-a) = \begin{cases} \infty, & x=a \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Mögliche Darstellungen der Delta-Funktion → Übung

z.B. $\delta(x) = \lim_{\alpha \to \infty} \underbrace{\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\alpha x^2}}_{\text{normierte Gaussfunktion}}$



mit wachsendem α wird die normierte Gaussfunktion immer höher und enger!

Relevanz für die Fouriertransformation

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ik(x-x')}$$

zeigt die Orthogonalität der Basisfunktion zu verschiedenen x

analog: $\delta(k - k') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{i(k-k')x}$

Das ist konsistent mit unserer Def. für die Fouriertransf.

wir hatten:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \hat{f}(k)\, e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx'\, e^{-ikx'} f(x')}_{\hat{f}(k)}\, e^{ikx}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, f(x')\, \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ik(x-x')}}\, \overset{!}{=} f(x)$$

$$\Rightarrow \text{gilt, falls } \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ik(x-x')} = \delta(x - x')$$

Anwendung auf die Diffusionsgleichung

wir hatten: $\frac{\partial}{\partial t} n(x,t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} n(x,t)$ (*)

Fourier-Transformiere (bezüglich des Ortes)

$$n(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ \hat{n}(k,t)\, e^{ikx}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} n(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ (-k)^2\, \hat{n}(k,t)\, e^{ikx}$$

Ableitung wirkt nur auf e^{ikx} !!

Einsetzen in ⊛

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ \hat{n}(k,t)\, e^{ikx} = D\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ (-k^2)\,\hat{n}(k,t)\, e^{ikx}$$

soll für jedes k gelten (da wir in orthogonales Funktionensystem entwickelt habe!)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\hat{n}(k,t) = -Dk^2\,\hat{n}(k,t)}$$

Das ist eine gewöhnl. lineare, homogene DGL erster Ordnung für die Fourierkoeffizient $\hat{n}(k,t)$!

es folgt sofort: $\hat{n}(k,t) = \hat{n}_0(k)\, e^{-Dk^2 t}$ mit $\hat{n}_0(k) = \hat{n}(k, t=0)$

Das räuml. Profil $n(x,t)$ folgt einfach aus der Fourier-Rücktransformation

$$n(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ \hat{n}(k,t)\, e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ \hat{n}_0(k)\, e^{ikx - Dk^2 t}$$