IV. Kurven und krummlinige Koordinaten

IV.1. Bahn eines Massenpunktes

Betrachte Körper, der sich bewegt im Raum

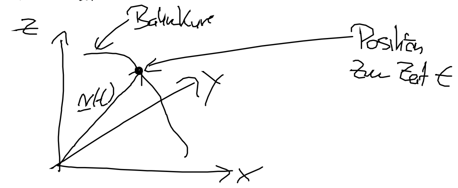
$\Rightarrow$ Beschreibung des Schwerpunktes durch "Bahnkurve"

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

t: Zeit

$\underline{r}$: Ortsvektor (dreidimensional oder zweidimensional)

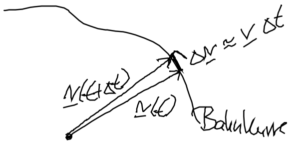
$\Rightarrow$ Die Bahnkurve ist eine vektorwertige Funktion



(Schwerpunkt-)Geschwindigkeit des Körpers

$$\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t) = \frac{d\underline{r}}{dt}$$

Richtung? beachte $\underline{v}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t)}{\Delta t}$



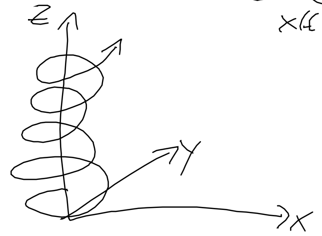
$$\Delta \underline{r} = \underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t)$$
$$\approx \underline{v}(t)\,\Delta t$$

Δt sehr klein

Man sieht: $\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t)$ liegt tangential an der Bahnkurve!!

analog Def. der Beschleunigung: $\underline{a}(t) = \dot{\underline{v}}(t) = \ddot{\underline{r}}(t) = \dfrac{d^2\underline{r}}{dt^2}$

Beispiel: $\underline{r}(t) = (\underbrace{r_0 \sin\tfrac{t}{2}}_{x(t)}, \underbrace{r_0 \cos\tfrac{t}{2}}_{y(t)}, \underbrace{v_0 t}_{z(t)})$ Schraubenkurve



Für $v_0 = 0$ ist $z(t) = 0$, und man erhält eine Kreisbahn

$$\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t) = \left(\frac{r_0}{2}\cos\frac{t}{2}, -\frac{r_0}{2}\sin\frac{t}{2}, v_0\right)$$ Geschw. ist konstant in z-Richtung!

Falls speziell $v_0=0$ $\Longrightarrow$ $\underline{v}(t)$ steht immer senkrecht auf $\underline{r}(t)$!
(denn dann $\underline{r}(t)\cdot\underline{v}(t)=0$!)

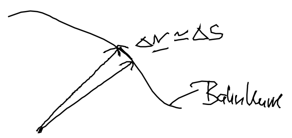
IV.2. Bogenlänge, begleitendes Dreibein

Alternativ zu Zeit t kann jeder andere Parameter zur Beschreibung der Bahnkurve $\underline{r}$ verwendet werden (sofern eine eindeutige Zuordnung zw. diesem Parameter und $\underline{r}$ möglich ist)

(in vielen Fällen)
Zweckmäßige Wahl:

Bogenlänge s

Definition: s ist die Länge der Kurve zw. zwei Punkten



Für einen infinitesimalen Abstand der beiden Punkte gilt:

$$\underbrace{\Delta\underline{r}}_{\approx\Delta s}=\underline{v}\,\Delta t \qquad \text{also} \qquad \Delta\underline{s}\approx\underline{v}\,\Delta t$$

Für sehr klein Δt: $$ds = d\underbrace{|\Delta\underline{s}|}_{s}=|\underline{v}|\,dt$$

$$\Longrightarrow \frac{ds}{dt}=|\underline{v}|=\left|\frac{d\underline{r}}{dt}\right|$$

$\longrightarrow$ Berechnung der Bogenlänge möglich durch

$$s=\int_{t_0}^{t}dt'\,|\underline{v}(t')|$$ Bogenlänge zwischen 2 Punkten (bei t_0 und t) auf der Raumkurve

Die Bogenlänge erhält man durch Integration der Geschwindigkeit!

Neue Beschreibung der Raumkurve

$$\tilde{\underline{r}}(s) = \underline{r}(t(s))$$

Ableitung

$$\frac{d}{ds}\tilde{\underline{r}}(s) \overset{\text{Kettenregel}}{=} \frac{d\underline{r}(t)}{dt}\,\frac{dt}{ds} = \underline{v}(t(s)) \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \underline{v}(t(s))\frac{1}{|\underline{v}|}$$

$$= \frac{\underline{v}(t(s))}{|\underline{v}|}$$

Das ist der Einheitsvektor der Geschwindigkeit!

$$= \underbrace{\hat{\underline{t}}(s)}_{\text{Tangentialvektor}}$$

Wir lassen im Folgenden die Tilde (~) wieder weg!

Weitere Definition:

Normalenvektor

$$\underline{n}(s) = \frac{\frac{d\underline{t}(s)}{ds}}{\left|\frac{d\underline{t}(s)}{ds}\right|}$$

Einheitsvektor, bestimmt durch die Ableitung des Tangentialvektors

Dieser Vektor $\underline{n}$ steht senkrecht auf dem Tangentialvektor

denn $\underline{t}(s)\cdot\underline{t}(s) = 1$ (denn $\underline{t}$ ist auch Einheitsvektor)

beide Seiten nach s ableiten

$$2\underbrace{\frac{d\underline{t}(s)}{ds}}_{\sim\underline{n}(s)} \overset{\text{Skalarprodukt}}{\cdot} \underbrace{\underline{t}(s)}_{\text{Tangentialvektor}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \underline{n} \perp \underline{t} \;!$$

Der Betrag des Nenners in der Def. von $\underline{n}(s)$, also $\left|\frac{d\underline{t}(s)}{ds}\right|$ entspricht der Krümmung:

$$\kappa = \left| \frac{d\underline{t}(s)}{ds} \right|$$

"Kappa"

plausibel, weil $\frac{d\underline{t}}{ds}$ gerade die Stärke der Änderung der Richtung der Tangente beschreibt

weiterhin folgt:

Einsetzen der Def. von $\underline{t}$

$$\kappa = \left| \frac{d\underline{t}(s)}{ds} \right| \overset{\downarrow}{=} \left| \frac{d^2 \underline{r}(s)}{ds^2} \right| = \sqrt{\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} + \frac{dz^2}{ds^2}}$$

Krümmungsradius: $R = \frac{1}{\kappa}$

Schliesslich

Die Binormale der Kurve ist definiert durch:

$$\underline{b} = \underline{t} \times \underline{n}$$

Vektorprodukt

Das ist wieder ein Einheitsvektor, also $|\underline{b}| = 1$

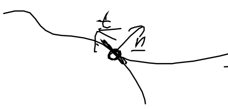
denn $|\underline{b}| = |\underline{t} \times \underline{n}|$

$$= \underbrace{|\underline{t}|}_{1} \underbrace{|\underline{n}|}_{1} \sin \underbrace{\sphericalangle(\underline{t},\underline{n})}$$

Winkel zw. $\underline{t}$ und $\underline{n}$. Dieser ist 90°!

$$= 1$$

$\Longrightarrow$ $\underline{t}$, $\underline{n}$, und $\underline{b}$ bilden zusammen das "Dreibein" eines lokalen Koordinatensystems!!



$\underline{b}$ geht senkrecht in die Tafel hinein!

dann: Die Richtungen von $\underline{t}, \underline{n}, \underline{b}$ hängen von der Position auf der Bahnkurve ab!

Ableitung der Binormale:

$$\frac{d\underline{b}(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\underline{t} \times \underline{n}\right) \overset{\text{Produktregel}}{=} \underbrace{\frac{d\underline{t}}{ds}}_{\kappa \underline{n}(s)} \times \underline{n} + \underline{t} \times \frac{d\underline{n}}{ds}$$

$$= \cancel{\kappa \underline{n}(s) \times \underline{n}(s)} + \underline{t} \times \frac{d\underline{n}}{ds} = \underline{t} \times \frac{d\underline{n}}{ds}$$

$\Rightarrow \frac{d\underline{b}}{ds}$ steht senkrecht auf $\underline{t}$

andererseits kann man leicht zeigen:

$\frac{d\underline{b}}{ds}$ steht auch senkrecht auf $\underline{b}$, da $\underline{b}$ Einheitsvektor (siehe Argumentation wie $\frac{d\underline{t}}{ds}$)

Der einzige Vektor, der sowohl auf $\underline{b}$ als auch auf $\underline{t}$ senkrecht steht, ist $\underline{n}$

$$\Rightarrow \frac{d\underline{b}}{ds} \sim \underline{n}$$

Man definiert:

$$\frac{d\underline{b}}{ds} = -\tau \underline{n}$$ mit τ "Torsion" der Raumkurve (Maß für die Schraubung)

Zusammenfassung:

Für eine Raumkurve $\underline{r}(s)$ läßt sich an jeder Stelle ~~ein~~ ein begleitendes Dreibein aus $\underline{t}(s), \underline{n}(s), \underline{b}(s)$ definieren. Diese bilden ein orthogonales Rechtssystem (wie $\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$)

Für die Ableitungen gilt:

„Frenetsche Formeln“

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\underline{t}}{ds} &= \kappa\, \underline{n}(s) \\ \frac{d\underline{n}}{ds} &= -\kappa\, \underline{t}(s) + \tau\, \underline{b}(s) \\ \frac{d\underline{b}}{ds} &= -\tau\, \underline{n}(s) \end{aligned}}$$

(hier nicht gezeigt)

IV. 3. Krummlinige Koordinaten

Motivation:

Für viele physikalische Probleme ist es vorteilhaft, statt der kartesischen Koordinaten symmetrieangepasste Koordinaten zu verwenden

also $\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \underline{r} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$

Ort eines Teilchens zu fester Zeit t

Betrachte Differenzvektor zwischen zwei benachbarten Punkten

$$\Delta \underline{r} = \underline{r}(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w) - \underline{r}(u,v,w)$$

Kann man wie folgt umschreiben

$$\Delta \underline{r} = \underline{r}(u+\Delta u, v, w) - \underline{r}(u,v,w)$$

Veränderung von $\underline{r}$ bezgl. der Koordinate u bei $v=$const und $w=$const

$$+\underline{r}(u+\Delta u, v+\Delta v, w) - \underline{r}(u+\Delta u, v, w)$$

Veränderung von $\underline{r}$ bei zusätzl. Änderung von v

$$+\underline{r}(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w) - \underline{r}(u+\Delta u, v+\Delta v, w)$$

Veränderung von $\underline{r}$ bei zusätzl. Änderung von w

Für kleine Differenzen $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ ergibt sich:

(durch Taylorentwicklung und Abbruch nach der ersten Ordnung)

$$\Delta \underline{r} = \left.\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\right|_{v,w} \Delta u + \left.\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\right|_{u,w} \Delta v + \left.\frac{\partial \underline{r}}{\partial w}\right|_{u,v} \Delta w \quad (*)$$

partielle Ableitungen (bei festgehaltenen v, w)

Tangenten – Einheitsvektoren (Definition)

$$\underline{e}_u = \frac{\left.\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\right|_{v,w}}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\right|} \; ; \quad \underline{e}_v = \frac{\left.\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\right|_{u,w}}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\right|} \; , \quad \underline{e}_w = \frac{\left.\frac{\partial \underline{r}}{\partial w}\right|_{u,v}}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial w}\right|}$$

„lokales Dreibein" (dieses ist aber nicht zwingend orthogonal)

$\underline{e}_u, \underline{e}_v, \underline{e}_w$ liegen "tangential"
~~an den Linien mit Konstanten~~

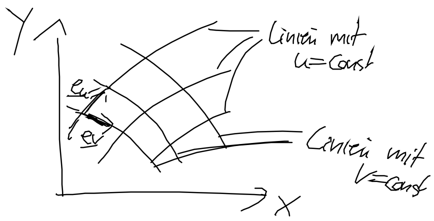


Illustration in zwei Dimensionen
$(x, y) \rightarrow (u, v)$

man sieht: Die Einheitsvektoren hängen vom Ort ab (im Unterschied zu den kartesischen Einheitsvektoren!)

Verknüpfe Def. der Einheitsvektoren mit (*)

$$\Rightarrow \Delta \underline{r} = \underline{e}_u \left| \left.\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\right|_{v,w} \right| \Delta u + \underline{e}_v \left| \left.\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\right|_{u,w} \right| \Delta v + \underline{e}_w \left| \left.\frac{\partial \underline{r}}{\partial w}\right|_{u,v} \right| \Delta w \qquad (**)$$

Der Betrag des Differenzvektors $\Delta \underline{r}$ heißt „Linienelement"
$|\Delta \underline{r}|$

betrachte Quadrat davon:

Skalarprodukt

$|\Delta \underline{r}|^2 = \Delta \underline{r} \cdot \Delta \underline{r}$

Auswertung über (**)

$= \underline{e}_u \cdot \underline{e}_u \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\right|^2 \Delta u^2$

$+ \underline{e}_u \cdot \underline{e}_v \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\right| \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\right| \Delta u \Delta v + \dots$

insgesamt 9 Terme!

benutze $\underline{e}_u \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\right| = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u}$

beachte: Die Einheitsvektoren sind nicht notwendigerweise orthogonal!!

$= \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} (\Delta u)^2 + \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \Delta u \Delta v + \dots$

$$\boxed{|\Delta \underline{r}|^2 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} g_{ij} \Delta u_i \Delta u_j}$$

(in drei Dimension)

mit $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = w$ und $g_{ij} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_j}$

„metrischer Tensor"

Darstellung des Quadrats des Linienelements über metrischen Tensor und Veränderungen Δu_i
kleine

<u>Wichtiger Spezialfall:</u>

„Krummlinig – orthogonale" Koordinaten

Für diese gilt: $\underline{e}_{u_i} \cdot \underline{e}_{u_j} = \delta_{ij}$ die Einheitsvektoren sind orthogonal

Folgerung:

$|\Delta \underline{r}|^2 = g_{uu} (\Delta u)^2 + g_{vv} (\Delta v)^2 + g_{ww} (\Delta w)^2$

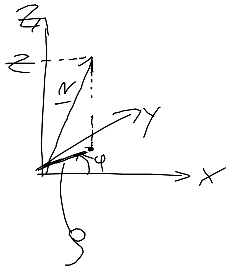
wobei g_{uu}, g_{vv}, g_{ww} die Diagonalelemente des metrischen Tensors sind (die Nichtdiagonalelemente sind Null!)

(man nennt g_{ij} auch "metrische Koeffizienten")

manchmal schreibt man auch einfacher: $g_{uu} = g_u^2$ mit $g_u = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\right|$

Wichtige Beispiele:

a) Zylinderkoordinaten: $\underline{r} = \underline{r}(\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \rho \cos\varphi \\ \rho \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$



mit $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

$\tan\varphi = \frac{y}{x}$

b) Kugelkoordinaten

$$\underline{r} = \underline{r}(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \sin\vartheta \cos\varphi \\ r \sin\vartheta \sin\varphi \\ r \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Lokales Dreibein, metrische Koeffizienten → Übungszettel!