

IV. Kurven und krummlinige Koordinaten

IV.1. Bahn eines Massenpunktes

Betrachte Körper, der sich bewegt im Raum

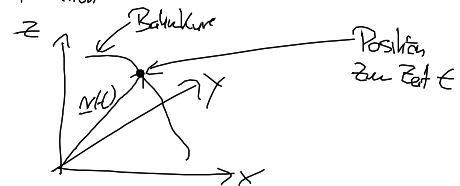
→ Beschreibung des Schwerpunkt durch "Bahnkurve"

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

(Anschüler
 (dreidimensional
 oder zweidimensional))

← Zeit

→ Die Bahnkurve ist eine vektorwertige Funktion



(Schwerpunkt-)Geschwindigkeit des Körpers

$$\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t) = \frac{d\underline{r}}{dt}$$

Richtung? beachte $\underline{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t)}{\Delta t}$



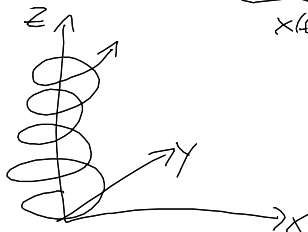
$$\Delta \underline{r} = \underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t) \approx \underline{v}(t) \Delta t$$

↑
Δt sehr klein

Man sieht: $\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t)$ liegt tangential an der Bahnkurve!

analog Def. der Beschleunigung: $\underline{a}(t) = \dot{\underline{v}}(t) = \ddot{\underline{r}}(t) = \frac{d\underline{v}}{dt}$

Beispiel: $\underline{r}(t) = \left(\underbrace{v_0 \sin \frac{t}{2}}_{x(t)}, \underbrace{v_0 \cos \frac{t}{2}}_{y(t)}, \underbrace{v_0 t}_{z(t)} \right)$ Schraubenkurve



Für $v_0 = 0$ ist $z(t) = 0$, und man erhält eine Kreisbahn

$$\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t) = \left(\frac{v_0}{2} \cos \frac{t}{2}, -\frac{v_0}{2} \sin \frac{t}{2}, v_0 \right) \quad \text{Geschw. ist konstant in z-Richtung!}$$

Falls speziell $v_0 = 0 \Rightarrow \underline{v}(t)$ steht immer senkrecht auf $\underline{r}(t)$!
 (denn $\frac{d}{dt} \underline{r}(t) \cdot \underline{r}(t) = 0$!)

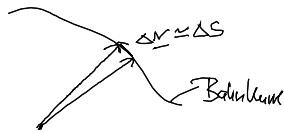
IV.2. Bogenlänge, begleitende Dräheri

Alternativ zur Zeit t kann jeder andere Parameter zur Beschreibung der Bahnkurve \underline{r} verwendet werden (sofern eine eindeutige Zuordnung zu diesem Parameter und \underline{r} möglich ist)

(in vielen Fällen)
 Zweckmäßige Wahl:

Bogenlänge s

Definition: s ist die Länge der Kurve zw. zwei Punkten



Für einen infinitesimalen Abstand der beiden Punkte gilt:

$$\Delta \underline{r} = \underline{v} \Delta t \quad \text{also} \quad \Delta s \approx |\underline{v}| \Delta t$$

$$\text{Für sehr kleine } \Delta t: \quad ds = d\left(\frac{\Delta s}{s}\right) = |\underline{v}| dt$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt} = |\underline{v}| = \left| \frac{d\underline{r}}{dt} \right|$$

\Rightarrow Berechnung der Bogenlänge möglich durch:

$$s = \int_{t_0}^t dt' |\underline{v}(t')| \quad \text{Bogenlänge zwischen 2 Punkten (bei } t_0 \text{ und } t) \text{ auf der Raumkurve}$$

Die Bogenlänge erhält man durch Integration der Geschwindigkeit!

Neue Beschreibung der Raumkurve

$$\tilde{r}(s) = \underline{r}(\underline{t}(s))$$

Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \tilde{r}(s) &\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \frac{d\underline{r}(\underline{t})}{d\underline{t}} \cdot \frac{d\underline{t}}{ds} = \underline{v}(\underline{t}(s)) \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \underline{v}(\underline{t}(s)) \frac{1}{|\underline{v}|} \\ &= \frac{\underline{v}(\underline{t}(s))}{|\underline{v}|} \quad \text{Das ist der Einheitsvektor der Geschwindigkeit!} \\ &= \underline{\hat{t}}(s) \\ &\quad \text{--- Tangentialvektor} \end{aligned}$$

Wir lassen in folgende drei Tilde (\sim) wieder weg!

Weitere Definitionen:

Normalenvektor

$$\underline{n}(s) = \frac{\frac{d\underline{t}(s)}{ds}}{\left| \frac{d\underline{t}(s)}{ds} \right|}$$

Einheitsvektor, bestimmt durch die Ableitung des Tangentialvektors

Dieser Vektor \underline{n} steht senkrecht auf dem Tangentialvektor

denn $\underline{t}(s) \cdot \underline{t}(s) = 1$ (denn \underline{t} ist auch Einheitsvektor)

beide Seiten nach s ableiten

$$\begin{aligned} 2 \underbrace{\frac{d\underline{t}(s)}{ds}}_{\sim \underline{n}(s)} \cdot \underbrace{\underline{t}(s)}_{\text{Tangentialvektor}} &= 0 \quad \text{Skalarprodukt} \\ \Rightarrow \underline{n} &\perp \underline{t} \quad ! \end{aligned}$$

Der Betrag des Nenners in der Def. von $\underline{n}(s)$, also $\left| \frac{d\underline{t}(s)}{ds} \right|$ entspricht der Krümmung:

$$K = \left| \frac{d\underline{t}(s)}{ds} \right|$$

"Kappa"

planaribel, weil $\frac{d\underline{t}}{ds}$ gerade die Stärke der Ablenkung der Richtung des Tangente beschreibt

Weiterhin folgt:

$$K = \left| \frac{d\underline{t}(s)}{ds} \right| \stackrel{\text{Einsetzen des Def. von } \underline{t}}{=} \left| \frac{d^2 \underline{r}(s)}{ds^2} \right| = \sqrt{\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} + \frac{dz^2}{ds^2}}$$

Krümmungsradius: $R = \frac{1}{K}$

Schlussatz

Die Binormale der Kurve ist definiert durch:

$$\underline{b} = \underline{t} \times \underline{n}$$

↑
Vektorprodukt

Das ist wieder ein Einheitsvektor, also $|\underline{b}| = 1$

$$\begin{aligned} \text{denn } |\underline{b}| &= |\underline{t} \times \underline{n}| \\ &= \frac{|\underline{t}|}{1} \frac{|\underline{n}|}{1} \sin \angle(\underline{t}, \underline{n}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Winkel zw. \underline{t} und \underline{n} . Dieser ist 90° !

⇒ $\underline{t}, \underline{n}$, und \underline{b} bilden zusammen das "Dreibein" eines lokalen Koordinatensystems!!



dam.: Die Richtungen von \underline{t} , \underline{n} , \underline{b} hängen von der Position auf der Bahnkurve ds !

Ableitung des Binormalen

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{b}(s)}{ds} &= \frac{d}{ds} (\underline{t} \times \underline{n}) \stackrel{\text{Produktregel}}{=} \underbrace{\frac{d\underline{t}}{ds}} \times \underline{n} + \underline{t} \times \frac{d\underline{n}}{ds} \\ &= \cancel{\kappa \underline{n}(s)} \times \underline{y}(s) + \underline{t} \times \frac{d\underline{n}}{ds} = \underline{t} \times \frac{d\underline{n}}{ds} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \frac{d\underline{b}}{ds}$ steht senkrecht auf \underline{t}

andereits kann man leicht zeigen:

$\frac{d\underline{b}}{ds}$ steht auch senkrecht auf \underline{b} , da \underline{b} Einheitsvektor
(siehe Argumentation wie $\frac{d\underline{t}}{ds}$)

Der einzige Vektor, der senkrecht auf \underline{b} als auch auf \underline{t} senkrecht steht, ist \underline{n}

$$\Rightarrow \frac{d\underline{b}}{ds} \sim \underline{n}$$

Man definiert:

$$\frac{d\underline{b}}{ds} = -\tilde{\tau} \underline{n} \quad \text{mit } \tilde{\tau} \text{ "Torsion" der Raumkurve} \\ \text{(Maß für die Schraubung)}$$

Zusammenfassung:

Für eine Raumkurve $\underline{r}(s)$ läßt sich an jeder Stelle immer ein begleitendes Dreibein aus $\underline{t}(s)$, $\underline{n}(s)$, $\underline{b}(s)$ definieren. Diese bilden ein orthogonales Rechtssystem (wie e_x, e_y, e_z)

Für die Ableitung gilt:

Frenetsche
Formeln!

$$\frac{dt}{ds} = \kappa \underline{n}(s)$$

$$\frac{dn}{ds} = -\kappa \underline{t}(s) + \tilde{\tau} \underline{b}(s) \quad (\text{hier nicht gezeigt})$$

$$\frac{db}{ds} = -\tilde{\tau} \underline{n}(s)$$

IV.3, Krummlinige Koordinaten

Motivation:

Für viele physikalische Probleme ist es vorteilhaft, statt der kartesischen Koordinaten symmetrieanpassende Koordinaten zu verwenden.

also $\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \underline{r} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$
 Ort eines Teilchens
 zu fester Zeit t

Betrachte Differenzvektor zwischen zwei benachbarten Punkten

$$\Delta \underline{r} = \underline{r}(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w) - \underline{r}(u, v, w)$$

Kann man wie folgt umschreiben

$$\Delta \underline{r} = \underline{r}(u + \Delta u, v, w) - \underline{r}(u, v, w)$$

Veränderung von \underline{r} bzgl. u
 bei $v = \text{const}$ und $w = \text{const}$
 der Koordinat

$$+ \underline{r}(u + \Delta u, v + \Delta v, w) - \underline{r}(u + \Delta u, v, w)$$

Veränderung von \underline{r} bei zusätzl.
 Änderung von v

$$+ \underline{r}(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w) - \underline{r}(u + \Delta u, v + \Delta v, w)$$

Veränderung von \underline{r}
 bei zusätzl. Änderung
 von w

Für kleine Differenzen $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ ergibt sich:

(durch Taylorentwicklung und Abbruch nach der ersten Ordnung)

$$\Delta \underline{r} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \Big|_{v,w} \Delta u + \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \Big|_{u,w} \Delta v + \frac{\partial \underline{r}}{\partial w} \Big|_{u,v} \Delta w \quad (*)$$

/ (bei festgehaltenen v, w)

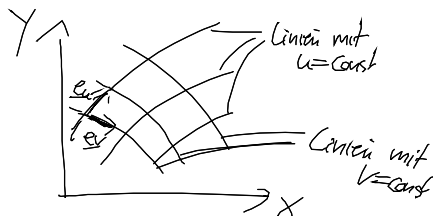
partielle
Ableitung

Tangenten - Einheitsvektoren (Definition)

$$e_u = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} /_{u,v}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right|} ; \quad e_v = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} /_{u,v}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|} , \quad e_w = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} /_{u,v}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right|}$$

"lokales Drehen" (dieses ist aber nicht
zwingend orthogonal)

e_u, e_v, e_w liegen "tangential"
~~an den Linien mit konstanten~~



Abstraktion in zwei Dimensionen:
 $(x, y) \rightarrow (u, v)$

man sieht: Die Einheitsvektoren hängen von Ort ab (im Gegensatz zu den kartesischen Einheitsvektoren!)

Verknüpfte Def. der Einheitsvektoren mit \otimes

$$\Rightarrow \Delta \mathbf{r} = e_u \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} /_{u,v} \right| \Delta u + e_v \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} /_{u,v} \right| \Delta v + e_w \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} /_{u,v} \right| \Delta w$$

Der Betrag des Differenzvektors $\Delta \mathbf{r}$ heißt "Linienelement"
 $|\Delta \mathbf{r}|$

behandelt Quadrat davon:

$$|\Delta \underline{r}|^2 = \Delta \underline{r} \cdot \Delta \underline{r} \quad \text{Skalarprodukt}$$

Auswertung über \otimes

$$= \underline{e}_u \cdot \underline{e}_u \left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \right|^2 \Delta u^2$$

$$+ \underline{e}_u \cdot \underline{e}_v \left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \right| \left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \right| \Delta u \Delta v + \dots$$

insgesamt 9 Terme!

benutze $\underline{e}_u \left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \right| = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u}$

beachte: Die Einheitsvektoren sind nicht notwendigerweise orthogonal!!

$$= \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} (\Delta u)^2 + \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \Delta u \Delta v + \dots$$

$$|\Delta \underline{r}|^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{ij} \Delta u_i \Delta u_j$$

(in drei Dimensionen)

mit $u_1 = u$
 $u_2 = v$
 $u_3 = w$

und $g_{ij} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_j}$

„metrischer Tensor“

Darstellung des Quadrats des Linienelements über metrischen Tensor und Verschiebung Δu_i
 (klein)

Wichtiger Spezialfall:

„Krummlinig - orthogonale“ Koordinaten

Für diese gilt: $\underline{e}_{u_i} \cdot \underline{e}_{u_j} = \delta_{ij}$ die Einheitsvektoren sind orthogonal

Folgerung:

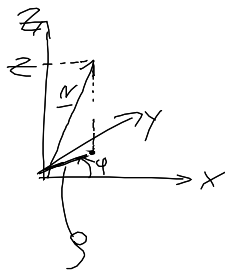
$$|\Delta \underline{r}|^2 = g_{uu} (\Delta u)^2 + g_{vv} (\Delta v)^2 + g_{ww} (\Delta w)^2$$

wobei g_{11}, g_{22}, g_{33} die Diagonalelemente
 des metrischen Tensors sind (die Nichtdiagonalelemente sind
 Null!)
 (man nennt g_{ij} auch "metrische Koeffizienten")

manchmal schreibt man auch einfacher: $g_{uu} = g_u^2$ mit $g_u = \left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \right|$

Wichtige Beispiele:

a) Zylinderkoordinat. $\underline{r} = \underline{r}(\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$



mit $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$
 $\tan \varphi = \frac{y}{x}$

b) Kugelkoordinaten

$$\underline{r} = \underline{r}(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

(siehe Drüben, metrische Koeffizienten → Übungsblatt!)