

Partielle Differentialgleichungen und Fourieranalyse

III.1 Allgemeines

Bisher hatten wir gewöhnliche DGLs kennengelernt

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad \text{mit } y(x)$$

Eine Partielle DGL hat folgende Form

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}) = 0$$

mindestens 2 Variablen

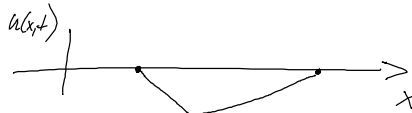
gemischte Ableitungen

$$z_x = \frac{\partial}{\partial x} z(x, y)$$

$$z_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} z(x, y)$$

III.2. Schwingende Saite

Sei $u(x, t)$ die Auslenkung einer Saite als Funktion der Zeit und des Ortes.



$u(x, t_0)$ ist die Anfangsauslenkung

Es gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$$

mit c : Schallgeschwindigkeit

zu bestimmen ist nun $u(x, t)$ für $t \geq 0$

Vorgaben sind außerdem

$$u(x, t=0) = u_0(x) \quad (\text{Anfangsprofil für die Auslenkung})$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = v_0(x) \quad (\text{Anfangsprofil für die Geschwindigkeit})$$

außerdem gelten die Randbedingungen:

$$u(x=0, t) = u(x=L, t) = 0$$

Lösungsmethode: Separationsansatz

$$u(x, t) = y(x) z(t)$$

Einsetzen:

$$y(x) z''(t) = c^2 y''(x) z(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{z''(t)}{c^2 z(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)} = -k^2$$

linke Seite hängt also nur von t ab und rechte nur von x

Darum müssen beide Seiten konstant sein!

\Rightarrow Jede dieser Gleichungen ist eine gewöhnliche lineare DGL 2. Ordnung mit Koeffizienten.

Eine mögliche Lösung für ein bestimmtes k kann sofort hingeschrieben werden:

$$y(x) = \alpha \cos(kx) + \beta \sin(kx)$$

$$z(t) = \gamma_1 \cos(kct) + \gamma_2 \sin(kct)$$

\Rightarrow „eindimensionale Wellen“

Betrachtung der (räumlichen) Randbedingungen

$$u(x=0, t) = u(x=L, t) = 0 \quad \forall t$$

Aus dem Separationsansatz folgt $y(0) = y(L) = 0$

$$\Rightarrow \alpha \cos(k0) + \underbrace{\beta \sin(k0)}_{=0} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0$$

$$\text{und} \quad \alpha \cos(kL) + \underbrace{\beta \sin(kL)}_{=0} \stackrel{!}{=} 0$$

$$k = k_n = \frac{n\pi}{L} \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots$$

Es kommen also nur diskrete Werte für k vor

k entspricht hier dem Wellenvektor (hier ein Skalar)

Wird hier eine lineare partielle DGL betrachtet, gilt das Superpositionsprinzip \Rightarrow Die allgemeine Lösung hat die Form

$$u_n(x,t) = \beta \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left(\gamma_1 \cos(k_n ct) + \gamma_2 \sin(k_n ct) \right)$$

Definiere neue Konstanten: $a_n = \beta \gamma_1$, $b_n = \beta \gamma_2$

$$\rightarrow u_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left(a_n \cos(k_n ct) + b_n \sin(k_n ct) \right)$$

Damit ist die allgemeine Lösung:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left(a_n \cos(k_n ct) + b_n \sin(k_n ct) \right)$$

Bestimmen der Koeffizienten a_n, b_n aus den Anfangsbedingungen:

$$(i) \quad u(x, t=0) = u_0(x)$$

$$(ii) \quad \left. \frac{\partial}{\partial t} u(x, t=0) \right|_0 = v_0(x)$$

aus (i) folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \stackrel{!}{=} u_0(x)$$

aus (ii) folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n c b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \stackrel{!}{=} v_0(x)$$

Frage: Wie bestimmen wir daraus die Koeffizienten?

Es gilt nämlich:

$$\int_0^L dx \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) = \dots$$

neue Variablen:
 $u = \frac{\pi}{L}x$
 $du = \frac{\pi}{L}dx$

$$= \frac{L}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{L}L} du \sin(nu) \sin(mu) = \frac{L}{\pi} \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{falls } n=m \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \frac{L}{2} \delta_{n,m} \quad \text{mit} \quad \delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n=m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Orthogonalitätsrelation kann nun benutzt werden um (i) und (ii) nach a_n und b_n aufzulösen.

aus (i):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = u_0(x)$$

$$\Rightarrow \int_0^L dx \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \int_0^L dx u_0(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{L}{2} \delta_{n,m} = \frac{L}{2} a_m = \int_0^L dx u_0(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

$$a_m = \frac{2}{L} \int_0^L dx u_0(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

analog mit b_n :

$$b_m = \frac{2}{L} \frac{1}{\sin c} \int_0^L dx v_0(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

\Rightarrow Endgültige Lösung der partiellen DGL!

Mathematisches Einschub

Definition:

Die Fourier-Reihe einer Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[-L, L]$ ist definiert als unendliche Reihe der Form:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right)$$

mit den reellen Koeffizienten a_n, b_n "Entwicklung in Stehenden Wellen"

Wichtig: Es gilt wegen der Periodizität der \sin - und \cos -Funktionen

$$\begin{aligned} f(x+2L) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x + \frac{n\pi}{L}2L\right) \\ &\quad + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x + \frac{n\pi}{L}2L\right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x) \end{aligned}$$

Eine noch allgemeinere Definition der Fourierreihe ist:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i n \frac{\pi}{L} x}, \text{ wobei } c_n \text{ jetzt komplex ist}$$

Falls $f(x)$ real ist, muss gelten dass $c_{-n} = c_n^*$, $c_0 = \text{real}$

denn dann folgt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{i n \frac{\pi}{L} x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i n \frac{\pi}{L} x} + c_0 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-i n \frac{\pi}{L} x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i n \frac{\pi}{L} x} + c_0 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_{-n}^* e^{-i n \frac{\pi}{L} x} + c_n e^{i n \frac{\pi}{L} x} \right) + c_0 \end{aligned}$$

jeder Term ist real weil $z + z^* = 2 \operatorname{Re}(z)$

In allen Fällen können wir die Koeffizienten a_n, b_n, c_n durch Projektion bestimmen:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx f(x) e^{-i \frac{n\pi}{L} x}$$

Dies folgt aus den Orthogonalitätsrelationen:

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L dx \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L} x\right) = \delta_{n,m}$$

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L dx \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right) = 0$$

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L dx \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L} x\right) = 0$$

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx e^{i \frac{n-m}{L} \pi x} = \delta_{n,m}$$

Wegen dieser Orthogonalität nennt man $\sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$, $\cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$ und $e^{i \frac{n\pi}{L} x}$ auch "Basisfunktionen" eines orthogonalen Funktionensystems.

Mathematischer Einschnitt (nr. 2)

Die hier eingeführten Funktionen $\cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$, $\sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$, $e^{i \frac{n\pi}{L} x}$ bilden einen Vektorraum!

Analog zu gewöhnlichen Vektoren / Vektorräumen:

i) Entwicklung

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \underbrace{e^{i \frac{n\pi}{L} x}}_{\text{Basisvektor}}$$

ii) Die Koeffizienten in der Entwicklung

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx f(x) e^{-i \frac{n\pi}{L} x}$$

Das entspricht im \mathbb{R}^d

$$\underline{y} = \sum_{n=1}^d y_n \underline{e}_n$$

$$y_n = \underline{e}_n \cdot \underline{y} = \sum_{i=1}^d e_{n,i} y_i = \langle \underline{e}_n | \underline{y} \rangle$$