V. Vektoranalysis

V.1. Vektorfelder

Ein Vektorfeld $\underline{A}(\underline{r})$ ist eine vektorwertige Funktion des Ortes $\underline{r}$ (meist in 3 Dimensionen)
Vektor
(allgemein: "Felder" hängen von Ort $\underline{r}$ ab)

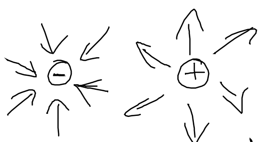
Physikalische Beispiel:

Elektrisches Feld $\underline{E}(\underline{r})$
Magnetfeld $\underline{B}(\underline{r})$
Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit $\underline{v}(\underline{r})$

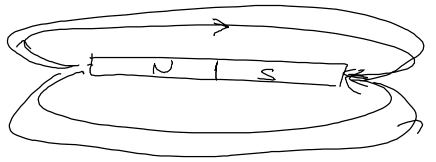
} dreidimensionale Felder

Darstellung eines Vektorfeldes z.B. durch Feldlinien (lokale Richtung des Feldes)

z.B. Feld einer negativen Punktladung , Stabmagnet



radiale Symmetrie!



Zylinder-Symmetrie

Spezialfall von Feldern:

Skalare Felder

z.B. Temperatur $T(\underline{r})$, ~~Feld~~ Stärke des elektr. Feldes $E(\underline{r}) = |\underline{E}|(\underline{r})$

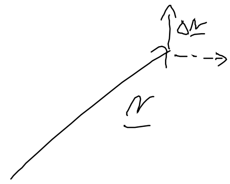
Dichte $\rho(\underline{r})$

V.2. Gradient

Gegeben: Skalares Feld $\varphi(\underline{r})$

$\underline{r}$ sei zunächst durch kartesische Koordinaten definiert, diese Annahme wird später "aufgeweicht"

Frage: Wie ändert sich $\varphi(\underline{r})$ räumlich?



Vorbetrachtung:

Feldänderung in irgendeiner Richtung:

$$\Delta\varphi = \varphi(\underline{r}+\Delta\underline{r}) - \varphi(\underline{r})$$

„Delta φ"

Sei $\Delta\underline{r}$ sehr klein sein

$$\approx \frac{\partial\varphi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\Delta z$$

partielle Ableitung

(alles in kartesischen Koordinaten)

Die Feldänderung in irgendeiner, durch die $\Delta\underline{r}$ gegebenen, Richtung setzt sich also ~~add~~ additiv zusammen aus den Änderungen entlang der drei Koordinatenrichtungen

Manchmal betrachtet man nur die sogenannte „Richtungsableitung" entlang eines bestimmten Einheitsvektor $\underline{v}$

$$D_v\varphi = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(\underline{r}+t\underline{v}) - \varphi(\underline{r})}{t}$$

(Annahme: $\Delta\underline{r} = t\,\underline{v}$ Einheitsvektor)

$$= \frac{d}{dt}\varphi(\underbrace{\underline{r}+t\underline{v}}_{\underline{y}})\Big|_{t=0}$$

wie beim Differenzquotienten für 1-dimensionale Funktion!

Anwendung Kettenregel

$$= \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{d}{dt}(x_i + t v_i)\Big|_{t=0}$$

hierbei: $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$

$$= \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}v_i$$

benutzt $\frac{\partial\varphi}{\partial y_i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$

Definition des Gradienten

hier zunächst in kartesischen Koordinaten

$$\nabla\varphi(\underline{r}) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\underline{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\underline{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\underline{e}_z = \begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}\end{pmatrix}$$

Nabla-Operator

Kartesische Einheitsvektoren

- Der Gradient ordnet also einem Skalarfeld $\varphi(\underline{r})$ ein vektorielles Feld $\nabla\varphi(\underline{r})$ zu!

- Zusammenhang mit Richtungsableitung:

$$D_v\,\varphi(\underline{r}) = \underbrace{\nabla\varphi \cdot \underline{v}}_{\text{Skalarprodukt}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} v_i \qquad \text{Skalar!}$$

- Zusammenhang mit der Verschiebung entlang $\Delta\underline{r}$

wir hatten: $\Delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\Delta z = \nabla\varphi \cdot \Delta\underline{r}$ Skalar!

Gradient in krummlinig-orthogonalen Koordinaten

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \underline{r} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

Komponente von $\nabla\varphi$ in Richtung einer krummlinig-orthogonalen Koordinate u

$$(\nabla\varphi)_u = \underline{e}_u \cdot \nabla\varphi \qquad \text{(Richtungsabl. in Richtung } \underline{e}_u\text{)}$$

$\underline{e}_u$: Einheitsvektor in u-Richtung

$$= \frac{\frac{\partial\underline{r}}{\partial u}}{\left|\frac{\partial\underline{r}}{\partial u}\right|} \cdot \nabla\varphi = \frac{1}{g_u}\left(\frac{\partial\underline{r}}{\partial u} \cdot \nabla\varphi\right) \qquad \text{mit } g_u = \left|\frac{\partial\underline{r}}{\partial u}\right|$$

$$= \frac{1}{g_u}\left(\underbrace{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial z}}_{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}\right)$$

inverse Anwendung der Kettenregel!

Vorstellung: $\varphi = \varphi(\underline{r}(u))$

$$= \frac{1}{g_u}\frac{\partial\varphi}{\partial u}$$

also insgesamt

$$\nabla\varphi = \left(\frac{1}{g_u}\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{1}{g_v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}, \frac{1}{g_w}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)$$

metrische Koeffizienten! (siehe letzte VL)

V.3. Gradient und konservative Kräfte

Der Gradient spielt bereits in der klass. Mechanik eine wichtige Rolle und zwar im Zusammenhang mit der Kraft

Newton'sche BWGL in drei Dimension

$$m\ddot{\underline{r}}(t) = m\,\underline{a}(t) = \underline{F}(\underline{r}(t))$$

Masse, Beschleunigung, Kraft

hier in 3 Dimensionen!

Kraft ist dann Vektorfeld!

Eine Kraft heißt konservativ, falls sie sich als Gradient eines skalaren „Potentials" darstellen läßt, d.h.:

$$\underline{F}(\underline{r}) = -\nabla\Phi(\underline{r})$$

Gradient

skalares Feld (kurz „Potential")

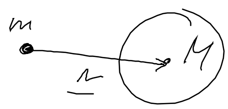
Beispiele:

i) Federkraft (→ harmonische Schwingung) z.B. Atome in Festkörpern, Gitterschwingungen

$$\underline{F} = -k(\underline{r} - \underline{r}_0) \implies \Phi(\underline{r}) = \frac{k}{2}(\underline{r} - \underline{r}_0)^2$$

Federkonstante, Ruhelage

ii) Gravitationskraft: $$\underline{F} = -G\,mM\frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^3}$$



Kraft zwischen einer Masse m und der Masse M

$\underline{r}$: Verbindungsvektor

$G \approx 6.67\cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2}$ Gravitationskonstante

Zugehöriges Potential:

$$\phi(\underline{r}) = -GmM\,\frac{1}{r}$$ Gravitationspotential

(hier ohne 'Beweis')

Gegenbeispiel: Reibungskräfte, Lorentzkraft sind Beispiele für nicht-konservative Kräfte!

Begriff der Arbeit:

Bewegt sich eine Masse entlang einer Kurve $\underline{r}(t)$ im Feld der Kraft $\underline{F}$, so wird an der Masse Arbeit verrichtet.

Konkret: Arbeit bei der Bewegung entlang eines kleinen Wegstückes $\Delta\underline{r}$

$$\delta W = \underline{F}\cdot\Delta\underline{r}$$

„Arbeit ist Kraft mal Weg"

$\Rightarrow$ Gesamte Arbeit entlang einer Kurve C im Raum:

(*) $$W = \int_C \underline{F}(\underline{r})\cdot d\underline{r}$$

"Kurvenintegral" entlang der Kurve C

Bemerkungen:

- (*) kann wie folgt umgeschrieben werden:

$$d\underline{r} = \frac{d\underline{r}}{dt}\,dt = \underline{v}\,dt$$

$$\Rightarrow dW = \underline{F}\cdot\Delta\underline{r} = \underbrace{\underline{F}\cdot\underline{v}}_{\text{Leistung}}\,\Delta t$$

"Arbeit ist Leistung mal Zeit"

bzw. $$W = \int_C \underline{F}(\underline{r})\cdot d\underline{r} \rightarrow \int_C \underline{F}\cdot\underline{v}\,dt$$

mathematisch: Kurvenintegral wird durch eine Parametrisierung über die Zeit auf ein gewöhnl. Integral zurückgeführt

aber: wir müssen $\underline{v}$ an jeder Stelle der Kurve C kennen!!

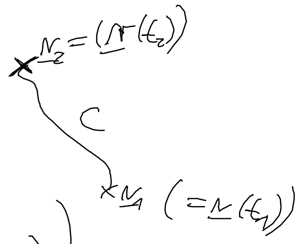
- Manchmal betrachtet man statt der am Teilchen verrichtete Arbeit (siehe Def. ⊛) auch die vom Teilchen geleistete Arbeit

$$\tilde{W} = -\int_C \underline{F}(\underline{r})\cdot d\underline{r}$$

also aufpassen mit den Vorzeichen!

Beachte: Die Def. der Arbeit ist unabhängig davon, ob die Kraft konservativ ist

Betrachte nun speziell konservatives Kraftfeld:

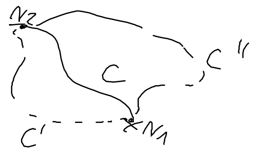


Aus ⊛ $$W = \int_C \underline{F}(\underline{r})\cdot d\underline{r}$$

$$= -\int_C \nabla\phi(\underline{r})\cdot d\underline{r} = -\left(\phi(\underline{r}_2) - \phi(\underline{r}_1)\right)$$

$$= \phi(\underline{r}_1) - \phi(\underline{r}_2)$$

Das bedeutet: Für konservative Kräfte hängt die Arbeit nur von der Differenz der skalaren Potentiale am Anfangs- und Endpunkt der Kurve C ab, nicht aber vom konkreten Weg!!



Die Kurven C, C', C'' liefern alle dieselbe Arbeit W alternativ kann man dasselbe zeigen über die Darstellung Arbeit = Leistung mal Zeit

$$W = -\int_C \nabla\phi \cdot d\underline{r} = -\int_{t_1}^{t_2} \nabla\phi \cdot \underline{v}\, dt$$ Parametrisierung durch die Zeit

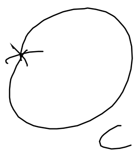
$$= -\int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\frac{d\phi(\underline{r}(t))}{dt}}_{\nabla\phi\cdot\underline{v}\ \text{Kettenregel}} dt = -\Big(\phi(\underline{r}(t_2)) - \phi(\underline{r}(t_1))\Big)$$

$$= \phi(\underline{r}_1) - \phi(\underline{r}_2)$$ genau wie oben!

Speziell: Geschlossene Kurve C

$$W = -\oint_{C} \nabla\phi \cdot d\underline{r} = 0 \quad !$$

geschlossene Kurve



Für konservative Kräfte verschwindet das Integral (d.h. die Arbeit) über eine geschlossene Kurve C !!