Zum Übungsbetrieb:

- Abgabe der Zettel Montag 11h !!
- Nur ~~Zw~~ Dreier- und Zweiergruppen!
- Namen des Übungsgruppenleiters auf den abgegeben Zetteln vermerken!

Wh: DGL mit getrennten Variablen

$$y'(x) = f(x)\,g(y) \Rightarrow \int_{y_0}^{y} \frac{dy'}{g(y')} = \int_{x_0}^{x} f(x')\,dx' \quad \Rightarrow \text{Realisierung der Anfangsbedingung } y(x_0) \overset{!}{=} y_0$$

$$\Rightarrow y(x) = \phi^{-1}(F(x)+c)$$

mit $\phi(y)$ Stammfkt. von $\frac{1}{g(y)}$

$F(x)$ " von $f(x)$

$c = \phi(y_0) - F(x_0)$

II. 2.2. Lineare Differentialgleichungen

Definition: Lineare DGLs sind (höchstens) linear in der Lösungsfunktion

Hier: Fokus auf lineare DGLs erster Ordnung

Einfachstes Beispiel:

$$y'(x) = \lambda\, y(x) \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}$$

Physikalisches Beispiel:
Radioaktiver Zerfall

$$N'(t) = -\alpha\, N(t)$$

Zahl der zur Zeit t noch nicht zerfallenen Atome

Lösung: $y(x) = c\, e^{\lambda x}$ mit c constant

denn $y'(x) = c\, e^{\lambda x} \lambda = \lambda\, y(x)$ ✓

mit Anfangsbedingung:

$$y(x_0) \overset{!}{=} y_0 \rightarrow y(x_0) = c\, e^{\lambda x_0} \overset{!}{=} y_0 \Rightarrow c = y_0 e^{-\lambda x_0}$$

Lösung, die die Anfangsbedingung erfüllt:

$$y(x) = y_0\, e^{\lambda(x-x_0)}$$

Allgemeine Form für eine derartige DGL:

$$\boxed{\begin{aligned} &y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x) \\ &\Leftrightarrow y'(x) - a(x)\,y(x) = b(x) \end{aligned}} \quad (*)$$

inhomogene lineare DGL erster Ordnung

Man nennt $b(x)$ die "Inhomogenität"

Hier sind $a(x)$ und $b(x)$ fest vorgegeben, und $y(x)$ ist gesucht

Die Gleichung (*) mit $b(x)=0$ nennt man die „zugehörige homogene Gleichung"

Beispiel: Klassische Mechanik

betrachte Teilchen mit Geschwindigkeit $v(t)$ unter Einfluß einer „äußeren" Kraft $F_a(t)$ (fest vorgegeben) (in einer Dim.)

sowie einer Reibungskraft (Stoke'sche Reibung)

es gilt (Newton)

$$m\,\dot{v}(t) = \boxed{m\,\frac{d}{dt}v(t) = \underbrace{F^a(t)}_{\text{Inhomogenität}} - \gamma\,v(t)}$$

Reibungskonstante abhängig von Viskosität, Teilchendurchmesser

Lösungsstrategie (für $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$)

1) Löse zunächst die zugehörige homogene Gl.

$$y'(x) = a(x)\,y(x)$$

Das ist eine DGL mit getrennten Variablen $(y'(x) = f(x)\,g(y))$. Hier besonders einfach!

$$\rightarrow g(y) = y$$
$$f(x) = a(x)$$

$$\rightarrow \int \frac{dy'}{y'} = \int dx'\,a(x')$$

$$\Rightarrow \ln y = A(x) + \tilde{c}$$ mit $A(x)$ ist Stammfunktion von $a(x)$

d.h. $A'(x) = a(x)$

$$\Rightarrow y(x) = e^{A(x)+\tilde{c}}$$

$$= c\, e^{A(x)} \quad \text{mit} \quad c = e^{\tilde{c}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = c\, e^{A(x)}}$$ ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

Falls man Anfangsbedingungen einbauen will: $\left(y(x_0) \overset{!}{=} y_0 \right)$

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy'}{y'} = \int_{x_0}^{x} dx'\, a(x') \Rightarrow \ln\frac{y}{y_0} = \int_{x_0}^{x} dx'\, a(x') = A(x) - A(x_0)$$

$$\Rightarrow y(x) = y_0\, e^{\int_{x_0}^{x} dx'\, a(x')}$$

2) Betrachte nun die volle inhomogene Gleichung

$$y'(x) = a(x)\, y(x) + b(x) \qquad (b \neq 0)$$

rechte Seite faktorisiert nicht

$\Rightarrow$ Die inhomogene DGL ist <u>keine</u> DGL mit getrennten Variablen!

„Trost": Wir brauchen nur eine einzige spezielle Lösung der inhomogenen DGL zu finden!

Denn: Für die allgemeine Lösung der vollen DGL gilt: (hier ohne Beweis)

$$y(x) = \underbrace{c\,\varphi(x)}_{\substack{\text{allgemeine Lösung} \\ \text{der homogenen} \\ \text{DGL}}} + \psi(x) \qquad (**)$$

$\psi(x)$ — spezielle Lösung der inhomogenen DGL

Zeige, dass (**) tatsächlich Lösung ist

$\psi(x)$: (spez.) Lösung der inhomogenen DGL.

$$\Rightarrow \psi'(x) = a(x)\,\psi(x) + b(x)$$

$c\varphi(x)$: allg. Lösung der homogenen Gl.

$$\Rightarrow c\varphi'(x) = a(x)\,c\,\varphi(x)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\psi + c\varphi)'}_{y'} = a(x)\underbrace{(\psi + c\varphi)}_{y} + b(x) \quad \checkmark$$

Wie findet man nun eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL?

Methode: Variation der Konstanten

zu lösen: $\psi'(x) = a(x)\psi(x) + b(x)$, es sei $A(x)$ Stammfunktion von $a(x)$

Ansatz: $\boxed{\psi(x) = u(x)\,e^{A(x)}}$

Erinnerung: die (allg.) Lösung der homogenen DGL war $c\,e^{A(x)}$ (c: Konstante)

Also: Statt der Konstanten c in der allgemeinen Lösung der homogenen DGL tritt hier eine noch unbekannte Funktion $u(x)$ auf

$\rightarrow$ daher der Name "Variation der Konstanten"

Damit $\psi(x)$ mit obigem Ansatz wirklich Lösung ist, muß gelten:

$$\frac{d}{dx}\Big(\underbrace{u(x)\,e^{A(x)}}_{\psi(x)}\Big) \overset{!}{=} a(x)\underbrace{u(x)\,e^{A(x)}}_{\psi(x)} + b(x)$$

Ableitung via Produktregel/Kettenregel

$$\frac{du}{dx} e^{A(x)} + u(x) e^{A(x)} \frac{dA}{dx} \overset{!}{=} a(x)\, u(x) e^{A(x)} + b(x) \quad \Big/ e^{-A(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = u'(x) = e^{-A(x)} \Big[\cancel{-u(x) e^{A(x)} \underbrace{\frac{dA}{dx}}_{a(x)}} + \cancel{a(x) u(x) e^{A(x)}} + b(x) \Big]$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = u'(x) = e^{-A(x)}\, b(x)$$

Ergebnis: $u(x)$ ist die Stammfunktion der Funktion $e^{-A(x)} b(x)$

bzw. $u(x) = \int dx'\, e^{-A(x')} b(x') + c$

Ergebnis der ganzen Überlegung:

Die spezielle Lösung der inhomogenen DGL zur Anfangsbedingung $\psi(x_0) \overset{!}{=} \psi_0$

$$\psi(x) = \underbrace{e^{\int_{x_0}^{x} dx'\, a(x')}}_{e^{A(x)}} \cdot \underbrace{\left(\int_{x_0}^{x} dx''\, e^{-\int_{x_0}^{x''} d\tilde{x}\, a(\tilde{x})} b(x'') + \psi_0 \right)}_{u(x)} \quad (**)$$

Test bezgl. der Anfangsbedingung:

$$\psi(x_0) = e^0 \cdot (0 + \psi_0) = 1 \cdot \psi_0 = \psi_0$$

Test, dass $\psi(x)$ tatsächl. die inhomogen DGL löst   Produktregel etc.

$$\frac{d\psi}{dx} \overset{(**)}{=} e^{\int_{x_0}^{x} dx' a(x')} \cdot a(x) \cdot \left(\int_{x_0}^{x} dx''\, e^{\cdots} b(x'') + \psi_0 \right)$$

$$+ e^{\int_{x_0}^{x} dx' a(x')} \left(e^{-\int_{x_0}^{x} d\tilde{x}\, a(\tilde{x})} b(x) \right)$$

$$= a(x) \psi(x) + b(x) \quad \checkmark$$

~~Volle~~ Allgemeine Lösung der inhomogen DGL:

$$y(x) = c\, e^{A(x)} + \psi(x)$$

Beispiele.

i) $y'(x) = 2x\,y(x) + \underbrace{x^3}$ Inhomogenität

1) Löse homogene Gleichung:

$$y'(x) = \underbrace{2x}_{a(x)}\,y \qquad \text{d.h.} \quad a(x) = 2x$$

$$A(x) = x^2 + \tilde{c} \qquad (A'(x) = a(x))$$

allg. Lösung: $y = c\,e^{x^2}$

2) Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung.

Anfangsbedingung: $\psi(x_0) \stackrel{!}{=} \psi_0$

sei $x_0 = 0$

benutze die Formel (***)

$$\psi(x) = e^{\int_0^x dx'\,2x'} \left(\int_0^x dx''\, e^{-\int_0^{x''} dx'\,2x'} (x'')^3 + \psi_0 \right)$$

$$= e^{x^2} \left(\int_0^x dx''\, e^{-(x'')^2} (x'')^3 + \psi_0 \right)$$

Zur Auswertung des Integrals:

Substitution: $s = (x'')^2 \Rightarrow \frac{ds}{dx''} = 2x'' \Rightarrow 2x''dx'' = ds$

und $2(x'')^3 dx'' = s\,ds$

$$\Rightarrow \int_0^x dx''(x'')^3 e^{-(x'')^2} = \int_0^{x^2} ds\; s\,e^{-s}$$ dann partiell integrieren

$$= \ldots = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2} \Longrightarrow$$

ii) Physikalisches Beispiel aus der klass. Mechanik

Teilchen in Anwesenheit einer äußeren Kraft und einer Reibungskraft

Newton'sche BWGL: $\frac{d}{dt} v(t) = -\tilde{\gamma}(t) v(t) + \frac{F^a(t)}{m}$ $\boxed{\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{m}}$

$= -\tilde{\gamma}(t) v(t) + f(t)$ — Inhomogenität

verallgemeinerte (zeitabhängige) Reibung

Anfangsbedingung:

$t_0 = 0 \rightarrow v(t_0) = v(0) = 1$

1) $\dot{v}(t) = \frac{dv}{dt} = -\tilde{\gamma}(t) v(t)$

$$\Rightarrow v(t) = C\, e^{-\int_0^t dt' v(t')} \quad \text{und } C = v(0) = 1$$

2) Inhomogenes Problem (siehe Formel (**))

$$v(t) = e^{-\int_0^t dt' \tilde{\gamma}(t')} \cdot \Big(\underbrace{\int_0^t dt'' e^{+\int_0^{t''} d\tilde{t}\, \tilde{\gamma}(\tilde{t})} f(t'')}_{} + v(0) \Big)$$

Integral über Beiträge der äußeren Kraft vom Zeitpunkt $t_0 = 0$ bis zu t

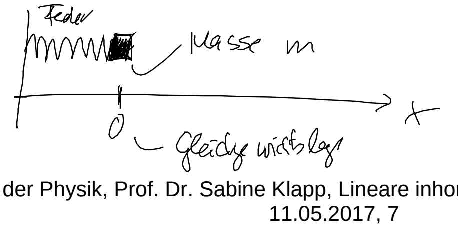
man sagt:
Der Einfluss der Kräfte wird "propagiert" über die Funktion $\underbrace{e^{\int \tilde{\gamma}(t) dt}}_{\text{Propagator}}$

II.3. Systeme von Differentialgleichungen

Wo kommen solche Systeme vor?

a) Rückführung von DGL's zweiter Ordnung auf System von DGL's erster Ordnung!

Beispiel: klass. Mechanik, Schwingung eines Massepunktes an einer Feder



eindimensionale Bewegung

Auf die Masse wirkt die "Federkraft"

$$F = -kx \quad \text{(d.h. } x>0 : \text{ Kraft wirkt nach links } (F<0)$$
$$\uparrow \qquad\qquad x<0 : \text{ " " " rechts } (F>0))$$

Federkonstante

Wir haben also angenommen: • Kraft linear in der Auslenkung x
„Hook'sches Gesetz"

• Es wirkt keine Gravitation

Newton'sche BWGL:

$$m\ddot{x}(t) = m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x(t)$$

(homogene) Lineare DGL zweiter Ordnung in der Zeit!

Führe formal den Impuls des Teilchens ein

$$p(t) = m\dot{x}(t)$$

Dann gilt:

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{m}\,p(t) \qquad \text{(Definitionsgleichung des Impulses)}$$

$$\dot{p}(t) = m\ddot{x}(t) = -k\,x(t) \qquad \text{Newton'sche BWGL}$$

$\Rightarrow$ Rückführung auf gekoppeltes System von DGL's erster Ordnung für $x(t)$ und $p(t)$