Wh: Komplexe Zahlen

$$\underbrace{z = x}_{\text{Realteil}} + i\overbrace{y}^{\text{Imaginärteil}}$$

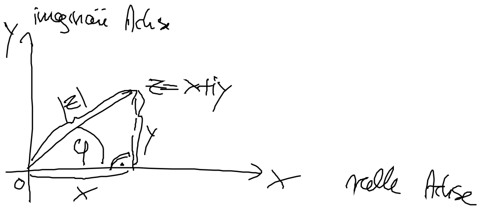
$z = x + iy$ (Kartesische Darstellung)

$i^2 = -1$

$z = i$ ist die Wurzel aus der Gleichung $z^2 = -1$

($z = -i$)

Darstellung in der komplexen Ebene.



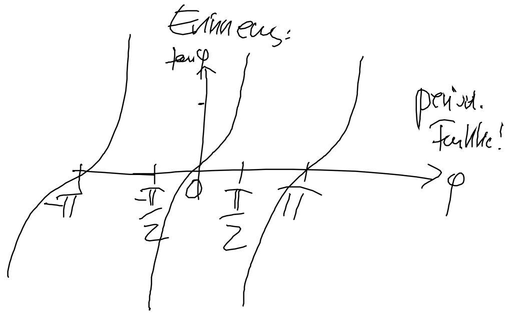
Polardarstellung:

$$z = \underbrace{|z|}_{\text{reelle Zahl!}} e^{i\varphi}, \quad |z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{mit } z^* = x - iy$$

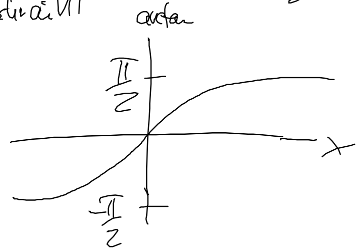
aus der Zeichnung: $\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{y}{x}$ (bzw. $x = |z|\cos\varphi$, $y = |z|\sin\varphi$)

$$\Rightarrow \varphi = \underbrace{\arctan}_{\text{Umkehrfunktion von tan}}\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{falls } x \neq 0$$

Erinnerung:



dabei wird die Umkehrfunktion ~~Sch~~ auf das Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ eingeschränkt



Fallunterscheidung!

$x=0$, $y>0$: $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\quad x=0$, $y<0$: $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

Polardarstellung: $z = |z|e^{i\varphi}$

für $|z|=1$ folgt $e^{i\varphi} = \underbrace{\cos\varphi}_{x} + i \underbrace{\sin\varphi}_{y}$

Kann man auch aus der Taylorreihe erhalten!

Formel von Moivre:

$$\underset{\text{n-te Potenz}}{z^n} = (x+iy)^n = \left(|z| e^{i\varphi}\right)^n = |z|^n \left(e^{i\varphi}\right)^n$$

$$= |z|^n e^{in\varphi}$$

$$= |z|^n \left(\cos n\varphi + i \sin n\varphi\right)$$

speziell für $|z|=1$ $\Rightarrow$ $(\cos + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$

Wurzeln:

$z^n = z_0 \Rightarrow z = z_0^{1/n}$ $\quad$ z heißt "n-te Wurzel" aus z_0

Beispiel: $z^n = 1$ $\quad$ $(z_0 = 1)$

benutze Formel von Moivre: $\quad$ $1 = e^{i2\pi k}$ mit $k = 0, 1, 2, ..$

$$= \underbrace{\cos 2\pi k}_{1} + i \underbrace{\sin 2\pi k}_{0}$$

$\Rightarrow z^n = e^{i2\pi k}$

$\Rightarrow z = e^{i\frac{2\pi}{n}k}$

Lösung ist nicht eindeutig!

Wo sind komplexe Zahlen in der Physik wichtig?

- Beschreibung von Schwingungen

$z(t) = r e^{i\omega t}$ $\quad$ ω Schwingungsfrequenz

t Zeit $\quad$ „harmonische Schwingung"

(Realteil: $x(t) = r\cos\omega t$
$y(t) = r\sin\omega t$)

- harmonischer Oszillator
- Gitterschwingungen

- Ebene Wellen (Elektrodynamik!)

  Lösungen der Maxwellgleichungen im Vakuum: $\underline{E}(\underline{r},t) \sim e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}$

  Grundgleichungen der Elektrodynamik

  elektrische Feld

- Quantenmechanik:

  Wellenfunktion $\psi(\underline{r},t)$

  Aufenthaltswahrscheinl.: $|\psi(\underline{r},t)|^2 = \psi\psi^*$

II. Gewöhnliche Differentialgleichungen

II.1. Motivation, Einführung

i) Dynamische Grundgleichungen in der Physik haben die Form von Differentialgleichungen!

Beispiele: Klass. Mechanik

- Newton'sche BWGL (Bewegungsgleichung) in einer Dimension

$$m \underbrace{\frac{d^2}{dt^2} x(t)}_{\substack{a(t) \\ \text{Beschleunigung}}} = \underbrace{F(t)}_{\text{Kraft}}$$

Beispiel für gewöhnl. DGL (Differentialgleichung!)

- Quantenmechanik: Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\,\psi(\underline{r},t) \quad \text{mit} \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\underline{r})$$

Laplace-Operator

enthält räumliche Ableitungen zweiter Ordnung

mit $\underbrace{\psi = \psi(\underline{r},t)}_{\text{Wellenfkt.}}$ und $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ Planck'sches Wirkungsquantum!

(in einer Dim.: $\Delta \to \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

Beispiel für partielle Differentialgleichung!

- Elektrodynamik:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\underline{B}(\underline{r},t)}_{\text{Magnetfeld}} = \nabla \times \underline{E}(\underline{r},t)$$

"Rotation" enthält (erste) räumliche Ableitung!

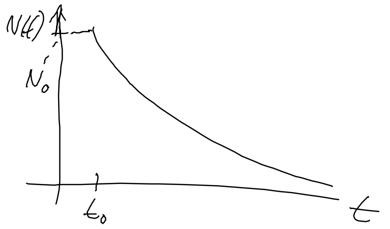
(ii) Auch neben den Grundgleichungen interessiert man sich häufig für Gesetzmäßigkeiten ganzer Funktion.

- Z.B. radioaktiver Zerfall:

  Wieviele Atome eines zum Zeitpunkt t_0 aus N_0 Teilchen bestehenden radioaktiven Präparats sind bei einer Zeit $t > t_0$ noch da?

  Es gilt: $\frac{d}{dt} N(t) = -\alpha N(t)$

  Lösung: Exponentieller Abfall



- Teilchendiffusion:

  $$\frac{\partial}{\partial t} c(x,t) = \underbrace{D}_{\text{Diffusionskonstante}} \underbrace{\Delta}_{\text{Laplace}} c(x,t)$$

  c: Konzentration

Klassifizierung von DGL's

- Gewöhnliche DGL's: Beschreiben Funktionen einer Variablen (häufig Zeit t)
  Beispiel Newtonsche BWGL

- Partielle DGL's:
  → Für Funktionen mehrerer Variablen
  „partiell", falls sich die Ableitungen auf versch. Variablen beziehen!

- Ordnung der DGL:
  höchste auftretende Ableitung
  (Newton: "2ter Ordnung")

- Weitere Unterscheidungsmerkmale:
  - einzelne DGL oder gekoppelte Systeme von DGL
  - Linear oder nichtlinear in der gesuchten Funktion
  - Explizit oder implizit bezgl. der gesuchten Funktion

II.2. Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung

explizite Form: $y'(x) = f(x,y)$

$y' = \frac{dy}{dx}$, f: vorgegebene Funktion

gesucht: $y(x)$

(z.B. $y'(x) = x^2 + 2\sin(x\, y(x))$ nicht linear!)

Bemerkungen:

i) Falls nur f nur von x abhängt, d.h. $y'(x) = f(x)$ ⟹ "bekanntes Gebiet"!

⟹ Lösung aus einfacher Integration

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} dt\, f(t).$$

Beispiel: $y'(x) = x^3 + \cos x$

$$\rightarrow y(x) = \frac{1}{4}x^4 + \sin x + C$$

Konstante C folgt aus der Anfangsbedingung:

$$y(x_0) \overset{!}{=} y_0 = \frac{1}{4}x_0^4 + \sin x_0 + C$$

$$\Rightarrow C = y_0 - \frac{x_0^4}{4} - \sin x_0$$

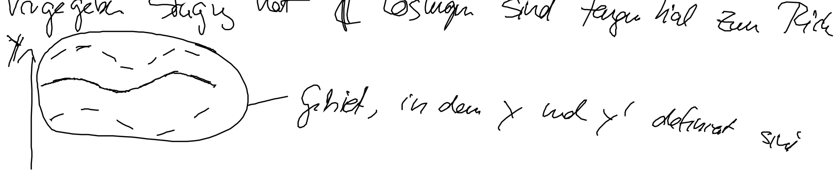
ii) Sei nun f auch eine Funktion von $y(x)$

Geometrische Interpretation von $y'(x) = f(x,y)$

In jedem Punkt (x,y) wird durch $f(x,y)$ eine Steigung vorgegeben.

Die Gesamtheit der Steigungen definiert ein „Richtungsfeld"

Die gesuchte Funktion $y(x)$ entspricht dann einer der Funktionen, die an jedem Punkt die vorgegebene Steigung hat ("Lösungen sind tangential zum Richtungsfeld")



Im allgemeinen sind viele Funktionen y mit dem Richtungsfeld kompatibel!
Festlegung erfolgt durch die Anfangsbedingungen!

Beispiel: $y' = \frac{y}{x}$ Lösung(en) $y(x) = Cx$

denn: $y'(x) = C = \frac{y}{x}$

Auch hier wird C durch die Anfangsbedingung festgelegt. $y(x_0) \overset{!}{=} y_0$

II.2.1. DGL mit getrennten Variablen

Form: $y'(x) = A(x,y)$ hier: A faktorisiert bzgl. x und y

$$\boxed{y'(x) = f(x)\, g(y)} \quad (*)$$

(f und g beide stetig)

Lösungsstrategie

1) Suche Nullstellen der Funktion $g(y)$

$\Longrightarrow$ (Konstanten) y_1, y_2, y_3. $\Longrightarrow$ $\left.\begin{array}{l} A = 0 \\ y' = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$ DGL erfüllt!

Ableitung dieser Konstanten sind Null:

2) Nehme nun an, dass $g(y) \neq 0$

Schreibe (*) um:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x)\, g(y) \Longleftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)\, dx$$

„Trennung der Variablen"

Integrieren auf beide Seiten:

$$\int \frac{dy'}{g(y')} = \int dx'\, f(x') + \text{const}$$

muss wieder entsprechend der Anfangsbedingung gewählt werden

Kann man so realisieren:

$$\boxed{\int_{y_0}^{y} \frac{dy'}{g(y')} = \int_{x_0}^{x} f(x')\, dx} \quad (**)$$

mit Anfangsbed. $y(x_0) \overset{!}{=} y_0$

Anders ausgedrückt: ("Kochrezept")

Sei $F(x)$ die Stammfunktion von $f(x)$

Sei $\phi(y)$ " " " $\frac{1}{g(y)}$

Dann folgt aus (**)

$$\phi(y) - \phi(y_0) = F(x) - F(x_0)$$

$$\Rightarrow \phi(y) = F(x) + C \quad \text{mit } C = \phi(y_0) - F(x_0)$$

$$\Rightarrow y(x) = \phi^{-1}(F(x)+C)$$

Beispiel

① $y'(x) = (y(x))^2$ Anfangsbed.: $y(x_0) = y(0) = y_0$ mit $y_0 > 0$

$x_0 = 0$

hier: $f(x) = 1$, $g(y) = y^2$ $\left(\Rightarrow \frac{1}{g} = \frac{1}{y^2}\right)$

Stammfunktion: $F(x) = x$

$$\phi(y) = -\frac{1}{y}$$

Integrations-Konstante: $C = \phi(y_0) - F(x_0)$ $(x_0 = 0)$

$$= -\frac{1}{y_0}$$

$\Rightarrow$ Umkehrfunktion von ϕ:

$$\phi^{-1}(y) = -\frac{1}{y} = \phi(y)$$

denn: $\phi^{-1}(\phi(y)) = -\frac{1}{\left(-\frac{1}{y}\right)} = y$ ✓✓

$$\Rightarrow y = \phi^{-1}(F(x)+c) = \frac{y_0}{1-y_0 x}$$

Alternativ direkter Weg:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy'}{y'^2} = \int_0^x dx' \, 1 = x$$

$$\left[-\frac{1}{y'}\right]_{y_0}^{y} = x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y} = x \quad / \cdot y$$

$$\frac{y}{y_0} - 1 = xy \Rightarrow \frac{y}{y_0} = yx + 1 \Rightarrow y = \frac{y_0}{1 - y_0 x}$$

(2) $y'(x) = \underbrace{e^y}_{g(y)} \underbrace{\sin x}_{f(x)}$ mit $y(x_0) \overset{!}{=} y_0$

Stammfunkt.: $F(x) = -\cos x$

$$\Phi(y) = \int \frac{1}{g(y')} dy' = -e^{-y} \Rightarrow \Phi^{-1} = -\ln(-y)$$

direkt:

$$\int_{y_0}^{y} dy' \, e^{-y'} = \int_{x_0}^{x} dx' \sin x'$$

$$\Rightarrow -e^{-y} + e^{-y_0} = -\cos x + \cos x_0$$

$$\Rightarrow e^{-y} = \cos x - C \quad \text{wobei} \quad C = \cos x_0 - e^{-y_0}$$

$$-y = \ln(\cos x - C)$$

$$y = -\ln(\cos x - C)$$