Nachklausur: Do 20.07. 8:00 EW 202

V.4. Die Divergenz:

geg.: Vektorfeld $\underline{A}(\underline{r})$ $\rightarrow$ Definition der Divergenz:

$$\mathrm{div}\,\underline{A}(\underline{r}) = \nabla \cdot \underline{A}(\underline{r})$$
$$= \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x(\underline{r}) \\ A_y(\underline{r}) \\ A_z(\underline{r}) \end{pmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$\Rightarrow$ Die Divergenz macht aus einem Vektorfeld eine skalare Größe!

Einige Rechenregeln:

- $\mathrm{div}\,\underline{A} = 0$ falls $\underline{A} = \mathrm{const.}$
- $\mathrm{div}\,\underline{r} = 1+1+1 = 3.$
- $\nabla \cdot (\nabla \varphi) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial\varphi/\partial x \\ \partial\varphi/\partial y \\ \partial\varphi/\partial z \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} =: \Delta \varphi$

mit $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ "Laplace-Operator"

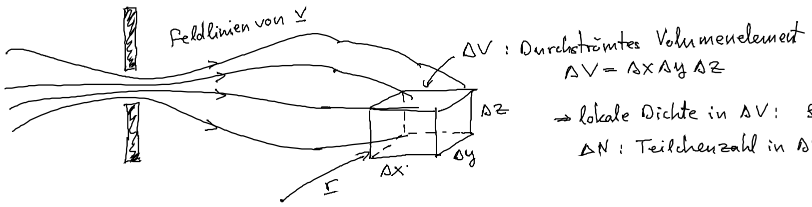
Interpretation der Divergenz:

Betrachte als Beispiel die Strömung einer Flüssigkeit. Definiere "Stromdichte":

$$\boxed{\underline{j} = \rho(\underline{r})\,\underline{v}(\underline{r})}$$

$\rho(\underline{r})$: lokale Massendichte

$\underline{v}(\underline{r})$: Geschwindigkeitsprofil



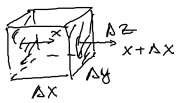
$\Rightarrow$ lokale Dichte in ΔV: $\rho(\underline{r}) = \frac{\Delta N}{\Delta V}$

ΔN : Teilchenzahl in ΔV

Frage: Wie ändert sich $\rho(\underline{r})$ in ΔV in der Zeit?

Bemerkung: Solange sich ρ überhaupt in der Zeit ändert, spricht man von einer nicht-stationären Strömung.

$$j_x = \rho(\mathbf{r})\, v_x(\mathbf{r}) = \frac{\Delta N}{\Delta V}\frac{\Delta x}{\Delta t} \underset{\substack{\uparrow \\ \Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z}}{=} \frac{\Delta N}{\Delta y \Delta z \Delta t}$$



j_x entspricht der Teilchenzahl die pro Zeiteinheit Δt das Flächenelement $\Delta F = \Delta y \Delta z$ senkrecht zur x-Richtung durchströmen

$\Rightarrow$ Analog für j_y, j_z

$\Rightarrow$ Zeitliche Änderung von ΔN in ΔV (<u>Bilanzgleichung</u>):

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \underbrace{j_x(x,y,z)\Delta y \Delta z}_{\text{Zustrom in x-Richtung}} - \underbrace{j_x(x+\Delta x,y,z)\Delta y \Delta z}_{\text{Abstrom in x-Richtung}}$$
$$+ j_y(x,y,z)\Delta x \Delta z - j_y(x,y+\Delta y,z)\Delta x \Delta z$$
$$+ j_z(x,y,z)\Delta x \Delta y - j_z(x,y,z+\Delta z)\Delta x \Delta y$$

Beide Seiten durch ΔV teilen:

$$\underbrace{\frac{\Delta N}{\Delta V \Delta t}}_{= \frac{\partial \rho}{\partial t}} = \frac{j_x(x,y,z) - j_x(x+\Delta x,y,z)}{\Delta x} + \frac{j_y(x,y,z) - j_y(x,y+\Delta y,z)}{\Delta y} + \frac{j_z(x,y,z) - j_z(x,y,z+\Delta z)}{\Delta z}$$

$\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t \to 0$

<u>Bemerkung:</u>

$$\frac{f(x) - f(x+\Delta x)}{\Delta x} = -\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \underset{\substack{\uparrow \\ \Delta x \to 0}}{=} -\frac{\partial f}{\partial x}$$

Also:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} j_x(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial y} j_y(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial z} j_z(x,y,z)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}}$$

"<u>Kontinuitätsgleichung</u>"

<u>Interpretation:</u> Die Teilchenzahl (Dichte) in einem Volumenelement kann sich nur durch einen Zu- und Abstrom von Teilchen durch die Außenflächen ändern $\Leftrightarrow$ "<u>Teilchenzahlerhaltung</u>"

Ähnliche Gleichung in Elektrodynamik und Quantenphysik.

<u>Folgerungen:</u>

- $\nabla \cdot \mathbf{j} > 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} < 0 \Rightarrow$ Es fließt mehr raus als rein. Man sagt: $\mathbf{j}$ hat eine "<u>Quelle</u>"
- $\nabla \cdot \mathbf{j} < 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} > 0 \Rightarrow \mathbf{j}$ hat eine "<u>Senke</u>".

$\Rightarrow$ Divergenz mißt lokale "<u>Quellenstärke</u>".

V.5. Rotation eines Vektorfelds:

<u>Definition:</u>

$$\text{rot}\, \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \underset{\text{Vektorprodukt}}{\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z$$

<u>Bemerkung:</u>

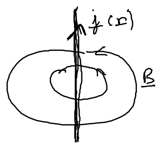
$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \dots$$

Interpretation:

rot mißt die lokale Wirbelstärke!

Beispiel:

Stromdurchflossener Leiter mit Stromdichte $\underline{j}(\underline{r})$ $\longrightarrow$ Erzeugt kreisförmiges Magnetfeld $\underline{B}(\underline{r})$



Es gilt:

$$\underline{\nabla} \times \underline{B}(\underline{r}) = \mu_0 \underline{j}(\underline{r}) \qquad \text{(Magnetostatik)}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2} = 1.2566 \cdots \cdot 10^{-6} \frac{N}{A^2}$$

Man kann zeigen, dass:

$$\nabla \times \underbrace{\nabla \varphi}_{\text{gradient}} = 0$$

$\Rightarrow$ Rotation eines Gradientenfeldes verschwindet!

z.B. für x-Komponente:

$$(\nabla \times \nabla \varphi)_x = \frac{\partial}{\partial y}(\nabla \varphi)_z - \frac{\partial}{\partial z}(\nabla \varphi)_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} = 0$$

Physikalische Konsequenzen:

- Konservative Kräfte sind wirbelfrei!

  $\underline{F}$ konservativ $\Leftrightarrow$ $\underline{F} = -\nabla \phi(\underline{r})$

- Elektrostatik: $\underline{E} = -\nabla \varphi(\underline{r}) \Rightarrow \underline{\nabla} \times \underline{E} = 0 \Rightarrow$ im statischen Fall keine Wirbel (nicht gültig in der Dynamik: $\nabla \times \underline{E} = -\dot{\underline{B}}$)

- $\nabla \cdot (\nabla \times \underline{A}) = 0 \quad (\text{div rot } \underline{A} = 0) \Rightarrow$ Wirbelfelder haben keine Quellen!

  Bsp. (Magnetostatik): $\underline{B} = \nabla \times \underline{A} \Rightarrow \nabla \cdot \underline{B} = 0$

  $\Rightarrow$ keine magnetischen "Monopole"!