Zwei Sätze zu Pythagoreischen Tripeln anlässlich des 10. Geburtstages der *Berlin Mathematical School* am 17.11.2016

Christian Thomsen, TU Berlin

Ganzzahlige Lösungen a,b und c der folgenden Gleichung sind als *Pythagoreische Tripel* bekannt

$$a^2+b^2=c^2. \tag{1}$$

Beispiele dafür sind $a=3$, $b=4$ und $c=5$

$$3^2+4^2=9+16=25=5^2 \tag{2}$$

oder $a=8$, $b=15$ und $c=17$

$$64+225=289=17^2.$$

Sind Lösungen a, b und c teilerfremd, wird das Triplet primitiv genannt. Lösungen, bei denen a, b und c durch Multiplikation mit einem Faktor hervorgehen, heißen nicht-primitiv, z.B. (Faktor$=2$): $a=6$, $b=8$ und $c=10$

$$36+64=100=10^2.$$

Die Generatoren für a, b und c sind

$$a=m^2-n^2,\ b=2mn \text{ und } c=m^2+n^2, \tag{3}$$

wie man durch Einsetzen der Generatoren in Glg. (1) zeigen kann

$$\left(m^2-n^2\right)^2+(2mn)^2=\left(m^2+n^2\right)^2. \tag{4}$$

Für positive, ganzzahlige $m>n>0$ erhält man so beliebig viele ganzahlige Pythagoreische Tripel. Es ist seit langem bekannt, dass es unendlich viele solcher Tripel gibt.[1]

Wir fragen uns nun, wie viele Pythagoreische Zwillinge es gibt, also solche Zahlenpaare für a und b, die sich um eins unterscheiden und dennoch Glg. (1) erfüllen. $a=3$ und $b=4$ ist das offensichtlichste Beispiel, $a=21$ und $b=20$ ein anderes. Aber gibt es unendlich viele solche Zwillinge?

Satz 1: *Es gibt unendlich viele Pythagoreische Zwillinge* $a=b\pm 1$.

Beweis: 'Zwilling' bedeutet $a=b\pm 1$ und damit für die Generatoren:

$$m^2-n^2=2mn\pm 1 \tag{5}$$

[1] Martin Aigner, Zahlentheorie, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2012, S. 77ff.

was wir mit der Abkürzung $z = m - n$ umsortieren können

$$\begin{aligned} (m-n)^2 - 2n^2 &= \pm 1 \\ z^2 - 2n^2 &= \pm 1 \end{aligned} . \tag{6}$$

Diese Gleichung wird in ihrer verallgemeinerten Form Pellsche Gleichung genannt:

$$z^2 - Nn^2 = \pm 1.$$

Für die Pellsche Gleichung ist es bewiesen[2], dass sie unendlich viele verschiedene Lösungen hat, wenn N kein einfaches Quadrat einer ganzen Zahl ist. Das ist hier mit $N = 2$ der Fall, so dass auch Glg. (6) unendlich viele Lösungen hat. Damit gibt es unendlich viele verschiedene Generatoren m und n, die jede zu einem Pythagoreischen Zwilling führen. q.e.d.[3]

Wie sehen die Lösungen der Pellschen Gleichung aus?

$$\varepsilon_i = \left(z_i + \sqrt{2}n_i\right)^i ,$$

wobei $i = 1,2,3,...$ ein fortlaufender Index ist. Man erhält also den Generator für das i-te Zwillingspaar durch entsprechendes Potenzieren der kleinsten Lösung. Die kleinste Lösung ist $z_1 = 1, n_1 = 1$, was man durch Einsetzen in Glg. (6) bestätigt findet:

$$\begin{aligned} \left(z_i + \sqrt{2}n_i\right)^i \left(z_i - \sqrt{2}n_i\right)^i &= (-1)^i \\ (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) &= -1 \\ -1 &= -1 \end{aligned} \tag{7}$$

oder, für ein gerades $i = 2$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 = (1+\sqrt{2})^2 &= 3 + 2\sqrt{2} \\ (3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}) &= 9 - 8 = 1 \end{aligned} \tag{8}$$

Wir sind nun in der Lage, eine einfache, rekursive Beziehung für aufeinander folgende Generatoren der Zwillinge aufzuschreiben. Für die i-te Lösung gilt

$$\begin{aligned} z_i + \sqrt{2}n_i &= \left(z_{i-1} + \sqrt{2}n_{i-1}\right)\left(1+\sqrt{2}\right) \\ &= z_{i-1} + 2n_{i-1} + \sqrt{2}\left(z_{i-1} + n_{i-1)}\right) , \end{aligned} \tag{9}$$

d.h.

$$n_i = z_{i-1} + n_{i-1} \text{ und } z_i = z_{i-1} + 2n_{i-1}. \tag{10}$$

Mit $z_i = m_i - n_i$ erhalten wir den einfachen rekursiven Ausdruck

$$n_i = m_{i-1} \quad \text{und} \quad m_i = 2m_{i-1} + n_{i-1}, \tag{11}$$

[2] Martin Aigner, Zahlentheorie, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2012, S. 70ff.

[3] Den Hinweis auf die Generatoren der Pythagoreischen Tripel und die Pellsche Gleichung für die Beweisführung von Satz 1 verdanke ich Günther Ziegler, FU Berlin, und Alexander Bobenko, TU Berlin.

wobei die kleinsten Werte $m_1 = 2$ und $n_1 = 1$ sind.

Die ersten fünfzehn Pythagoreischen Zwillinge sind in Tabelle 1 gelistet. Es fällt auf, dass ein n aus einer Zeile immer gleich dem m der vorherigen Zeile ist und dass sich jedes m aus dem doppelten m plus n der vorhergehenden Zeile ergibt, wie in (11) angegeben.

Auf ersten Blick widersprüchlich erscheint
Satz 2: *Es gibt nur ein Pythagoreisches Zwillingspaar. Alle anderen sind quasi-nicht-primitiv in dem Sinne, dass jedes Zwillingspaar* (a_i, b_i) *aus dem vorhergehenden Zwillingspaar* (a_{i-1}, b_{i-1}) *durch einen Faktor* σ_i *hervorgeht, der im Grenzfall* $i \to \infty$ *gegen den festen Wert* $\sigma = 3 + 2\sqrt{2}$ *strebt.*

$$\lim_{i\to\infty}\left(\frac{a_i}{a_{i-1}}\right) = \lim_{i\to\infty}\left(\frac{b_i}{b_{i-1}}\right) = \lim_{i\to\infty}\left(\frac{c_i}{c_{i-1}}\right) = \sigma \tag{12}$$

Beweis: Einsetzen von Glg. (11) in das Verhältnis zweier aufeinander folgender a und c ergibt nach Ausmultiplikation und Umsortieren

$$\begin{aligned} \frac{a_i}{a_{i-1}} &= \frac{c_i}{c_{i-1}} \\ \frac{m_i^2 - n_i^2}{m_{i-1}^2 - n_{i-i}^2} &= \frac{m_i^2 + n_i^2}{m_{i-1}^2 + n_{i-i}^2} \\ n_i^2 - m_i^2 + 2m_i n_i &= 0 \text{ mit Glg. (11) und } i-1 \to i. \end{aligned} \tag{13}$$

Aufgelöst nach n_i erhält man

$$n_i = m_i(-1+\sqrt{2}) \text{ oder } m_i = n_i(1+\sqrt{2}), \tag{14}$$

was das Verhältnis m_i/n_i der beiden Elemente des Generators beschreibt. In Tabelle 1 findet sich dieses Verhältnis für große i wieder.

Das Verhältnis zweier aufeinander folgender Werte für b ist dann mit $n_i = m_{i-1}$ und (14):

$$\begin{aligned} \frac{b_i}{b_{i-1}} = \frac{m_i n_i}{m_{i-1} n_{i-1}} = \frac{m_i m_{i-1}}{m_{i-1} m_{i-2}} = \frac{m_i}{m_{i-2}} = \\ \frac{\left(1+\sqrt{2}\right) n_i}{m_{i-2}} = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2 m_{i-2}}{m_{i-2}} = 3 + 2\sqrt{2} = \sigma \quad \text{q.e.d.} \end{aligned} \tag{15}$$

Das heißt, dass a_i, b_i und c_i in der Tat für wachsende i 'immer weniger' teilerfremd sind und für $i \to \infty$ den gemeinsamen Teiler $3 + 2\sqrt{2}$ haben, also nicht mehr primitiv sind. Daher die Bezeichnung quasi-nicht-primitiv in Satz 2.

i	m	n	a	b	c	m_i/n_i	a_i/a_{i-1}	c_i/c_{i-1}
1	2	1	3	4	5			
2	5	2	21	20	29	2.5	7.0	5.8
3	12	5	119	120	169	2.4	5.666 666 67	5.827 586 21
4	29	12	697	696	985	2.416 666 67	5.857 142 86	5.828 402 37
5	70	29	4 059	4 060	5 741	2.413 793 10	5.823 529 41	5.828 426 40
6	169	70	23 661	23 660	33 461	2.414 285 71	5.829 268 29	5.828 427 10
7	408	169	137 903	137 904	195 025	2.414 201 18	5.828 282 83	5.828 427 12
8	985	408	803 761	803 760	1 136 689	2.414 215 69	5.828 451 88	5.828 427 12
9	2 378	985	4 684 659	4 684 660	6 625 109	2.414 213 20	5.828 422 88	5.828 427 12
10	5 741	2 378	27 304 197	27 304 196	38 613 965	2.414 213 62	5.828 427 85	5.828 427 12
11	13 860	5 741	159 140 519	159 140 520	225 058 681	2.414 213 55	5.828 427 00	5.828 427 12
12	33 461	13 860	927 538 921	927 538 920	1 311 738 121	2.414 213 56	5.828 427 15	5.828 427 12
13	80 782	33 461	5 406 093 003	5 406 093 004	7 645 370 045	2.414 213 56	5.828 427 12	5.828 427 12
14	195 025	80 782	31 509 019 101	31 509 019 100	44 560 482 149	2.414 213 56	5.828 427 13	5.828 427 12
15	470 832	195 025	183 648 021 599	183 648 021 600	259 717 522 849	2.414 213 56	5.828 427 12	5.828 427 12
...								
20	38 613 965	15 994 428	1 235 216 565 974 041	1 235 216 565 974 040	1 746 860 020 068 409	2.414 213 56	5.828 427 12	5.828 427 12

Tabelle 1: Die ersten 15 Pythagoreischen Zwillinge a_i und b_i, ihre Generatoren m_i und n_i sowie das Verhältnis m_i/n_i und das zweier aufeinander folgender a und c. Die Grenzwerte sind $1+\sqrt{2} = 2.414\,213\,5\ldots$ für m_i/n_i und $3+2\sqrt{2} = 5.828\,427\,127\ldots$ für a_i/a_{i-1} und c_i/c_{i-1}. Beispielhaft seien hier noch a_i und c_i für $i = 100$ wiedergegeben:
$a_{100} = 21\,669\,693\,148\,613\,788\,330\,547\,979\,729\,286\,307\,164\,015\,202\,768\,699\,465\,346\,081\,691\,992\,338\,845\,992\,697$ und
$c_{100} = 30\,645\,573\,943\,232\,956\,180\,057\,972\,969\,833\,245\,887\,630\,954\,508\,753\,693\,529\,117\,371\,074\,705\,767\,728\,665$