Wh:

Divergenz des Vektorfeldes $\underline{A}(\underline{r})$

$$\text{div}\,\underline{A}(\underline{r}) = \nabla \cdot \underline{A}(\underline{r})$$

in Kartes. Koordinaten: $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

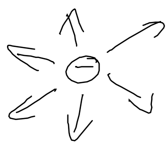
$\underline{A} = \begin{pmatrix} A_x(\underline{r}) \\ A_y(\underline{r}) \\ A_z(\underline{r}) \end{pmatrix}$

Skalar!

Anwendungsbeispiele:

- Gauß'sches Gesetz: $\nabla \cdot \underline{E}(\underline{r},t) = \frac{\rho(\underline{r},t)}{\varepsilon_0}$ Ladungsdichte

  elektr. Feld



Die Quellen des elektr. Feldes sind die Ladungen

- Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial \rho(\underline{r},t)}{\partial t} = -\nabla \cdot \underline{j}(\underline{r},t)$

  Strom

  Massendichte, Ladungsdichte, Teilchendichte, ...

  Zeitl. Veränderung der Dichte erzeugen einen Strom

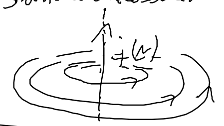
Enger Zusammenhang mit Erhaltung von Masse, Ladung, etc.

Die Teilchenzahl in einem Volumenelement kann sich zeitl. nur durch einen Zu- oder Abstrom durch die Außenfläche des Volumens ändern

Rotation: $\nabla \times \underline{A}(\underline{r})$ Kreuzprodukt $\Rightarrow$ Ergebnis ist ein Vektor!!

anschaulich: Die Rotation mißt lokale Wirbelstärke

Beispiel: stromdurchflossener Leiter $\Rightarrow$ erzeugt kreisförmiges Magnetfeld



$$\nabla \times \underline{B}(\underline{r}) = \mu_0\, \underline{j}(\underline{r})$$

Wichtig!! $\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$

Skalares Feld

Gradient

$\Rightarrow$ Mathemat. konservative Größen sind wirbelfrei! $(\underline{E} = -\nabla \phi(\underline{r}))$

V.6. Integralsätze

Motivation:

Betrachte nochmal konservative Kräfte $\underline{F} = -\nabla\Phi(\underline{r})$

Wir hatten gesehen

i) $\nabla \times \underline{F} = 0$ (V.5.)

ii) $W = \oint_C \underline{F}(\underline{r})\cdot d\underline{r}$ (V.3)

Kurvenintegral entlang einer geschlossenen Kurve

$= 0$

Arbeit entlang eines geschlossenen Weges ist Null

($\Leftrightarrow$ Arbeit ist wegunabhängig)

endliche Kurve $W_{12} = \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{F}\cdot d\underline{r} = \Phi(\underline{r}_1) - \Phi(\underline{r}_2)$

Es gibt also einen Zusammenhang zw. Rotation und Kurvenintegral!

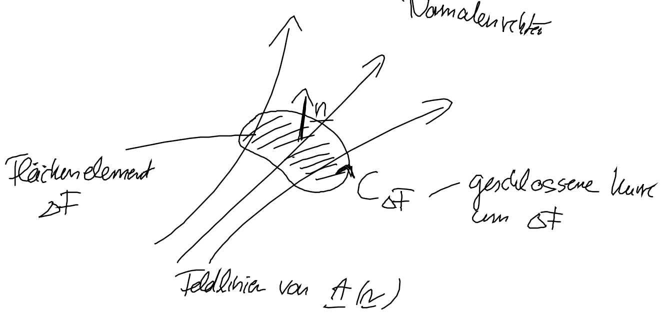
Ausgangspunkt: Integraldefinition der Rotation

(*) $$\left(\nabla \times \underline{A}(\underline{r})\right)\cdot \underline{n} = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{C_{\Delta F}} \underline{A}(\underline{r})\cdot d\underline{r}$$

Wegelement

Normalenvektor

Kurvenintegral über geschlossene Kurve

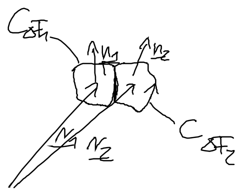


Beachte:
$C_{\Delta F}$ bildet eine Rechtsschraube um $\underline{n}$

Folgerung aus (*)

Sei ΔF sehr klein: $\oint \underline{A}(\underline{r})\cdot d\underline{r} = \Delta F\, \underline{n}\cdot\left(\nabla \times \underline{A}(\underline{r})\right)$

Addiere nun zu ΔF ($= \Delta F_1$) (bei $\underline{r} = \underline{r}_1$) ein kleines, benachbartes Flächenelement bei $\underline{r}_2$



$$\Delta F_1\, \underline{n}_1 \left(\nabla \times \underline{A}(\underline{r}_1)\right) + \Delta F_2\, \underline{n}_2 \left(\nabla \times \underline{A}(\underline{r}_2)\right)$$
$$= \oint_{C_{\Delta F_1}} \underline{A}\cdot d\underline{r} + \oint_{C_{\Delta F_2}} \underline{A}\cdot d\underline{r}$$

Begründung: $\longrightarrow \; = \oint_{C_{\Delta F_1+\Delta F_2}} \underline{A}\cdot d\underline{r}$ mit $C_{\Delta F_1+\Delta F_2}$

Die Beiträge der gemeinsamen Randkurve heben sich weg, da diese in umgekehrter Richtung durchlaufen werden!

Macht man dies vielfach, so ergibt sich:

$$(**)\quad \oint_C \underline{A}(\underline{r})\cdot d\underline{r} = \sum_{i=1}^{K} \Delta F_i \, \underline{n}_i \left(\nabla \times \underline{A}(\underline{r}_i)\right)$$

C – Randkurve, die alle Teilflächen ΔF_i einschliesst

Lasse nun in (**) die Summe $\sum_{i=1}^{K}$ sehr gross ~~werden~~ werden (also K gross)

$\Rightarrow$ rechte Seite kann als Riemann-Summe interpretiert werden

$\Rightarrow$ rechte Seite geht über in ein Flächenintegral

$$\boxed{\oint_C \underline{A}(\underline{r})\cdot d\underline{r} = \int_{F_C} d\underline{F}\cdot\left(\nabla\times\underline{A}(\underline{r})\right)} \quad \text{mit} \quad \underbrace{d\underline{F}}_{\text{Vektor}} = \underbrace{\underline{n}}_{\text{Normalenvektor}} \underbrace{dF}_{\text{Skalar}}$$

Stokes'scher Integralsatz

Verknüpfung von Kurvenintegral, Rotation und Flächenintegral!!

Betrachte nun einen weiteren Integralsatz, der die Divergenz enthält!

Erinnerung:
$$\underbrace{\nabla\cdot\underline{j}(\underline{r},t)}_{\text{Massenstromdichte}} = -\frac{\partial \overbrace{\rho}^{\text{Massendichte}}(\underline{r},t)}{\partial t}$$

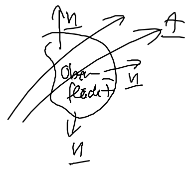
Divergenz ist mit einem "Fluss" durch die Oberfläche eines Volumens verknüpft!

Allgemein definiert man:

$$\Psi = \int_F \underline{A}(\underline{r})\cdot d\underline{F} \qquad d\underline{F} = dF\,\underline{n}$$

Fluß des Vektorfeldes $\underline{A}(\underline{r})$ durch die (Ober-)Fläche F

muß nicht klein sein!



(Normalenvektor ist lokale Größe!)

Benutze nun Integraldefinition der Divergenz:

Fluß durch die geschlossene Oberfläche $F_{\Delta V}$ des Volumens ΔV!

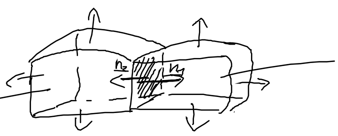
$$(*) \quad \nabla\cdot\underline{A} = \operatorname{div}\underline{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_{F_{\Delta V}}\underline{A}\cdot d\underline{F}$$

Folgerung aus (*)

Für sehr kleine, aber endliche ΔV gilt:

$$\oint_{F_{\Delta V}}\underline{A}\cdot d\underline{F} = \Delta V\,\operatorname{div}\underline{A}$$

Addiere die Beiträge von vielen, aneinander grenzenden Volumenelementen



ΔV_2, Oberfläche $F_{\Delta V_2}$

ΔV_1 mit Oberfläche $F_{\Delta V_1}$

Beiträge von aneinander grenzenden Flächen ~~Hann~~ heben sich heraus, da die Normalenvektoren antiparallel sind!

$\Rightarrow$ es verbleibt der Beitrag über die einhüllende Oberfläche.

Aus (**)

$$\oint_{F_V}\underline{A}(\underline{r})\cdot d\underline{F} = \sum_{i=1}^{N}\Delta V_i\,\big(\overbrace{\nabla\cdot\underline{A}(\underline{r})}^{\operatorname{div}\underline{A}}\big)$$

F_V Einhüllende Fläche der ΔV_i

ΔV sehr klein, V sehr groß.

$$\boxed{\oint_{F_V} \underline{A}(\underline{r}) \cdot d\underline{F} = \int_V dV \, \mathrm{div}\, \underline{A}(\underline{r})}$$ Gauß'scher Integralsatz

$\Rightarrow$ Verknüpfung von Flächenintegral, Volumenintegral, Divergenz

Betrachte z.B. Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \rho(\underline{r},t)}{\partial t} = -\nabla \cdot \underline{j}(\underline{r})$$

"Umschreiben in Integralform": Integriere auf beiden Seiten über Volumen V

$$\int_V \frac{\partial \rho(\underline{r},t)}{\partial t} dV = -\int_V \left(\nabla \cdot \underline{j}(\underline{r})\right) dV$$

Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes

$$= -\int_{F_V} \underline{j}(\underline{r}) \cdot d\underline{F}$$

Fluß des Stroms $\underline{j}$ durch die Oberfläche!

Vertausche auf der linken Seite noch räuml. Integration mit zeitlicher Ableitung!

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}}_{\frac{d}{dt}} \int_V \rho(\underline{r},t) dV = \underbrace{-\int_{F_V} \underline{j}(\underline{r}) \cdot d\underline{F}}_{\text{Fluß}}$$

z.B. $\rho(\underline{r},t)$ Massendichte, $\underline{j}(\underline{r},t)$ entsprechender Massenstrom (wie in der Strömungsmechanik)

$$\frac{d}{dt} M(t) = \underbrace{-\int_{F_V} \underline{j}(\underline{r}) \cdot d\underline{F}}_{\text{Fluß}}$$

mit

$$M(t) = \int_V dV \rho(\underline{r},t)$$

Gesamtmasse in dem betrachteten Volumen V

Dies zeigt, dass die Kontinuitätsgleichung ~~eng~~ eng mit der Erhaltung der Masse (oder entsprechender anderer Größen) verknüpft ist!