Partielle Differentialgleichungen und Fourieranalyse

VII.1 Allgemeines

Bisher hatten wir gewöhnliche DGLn kennengelernt

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad \text{mit } y(x)$$

Eine Partielle DGL hat folgende Form:

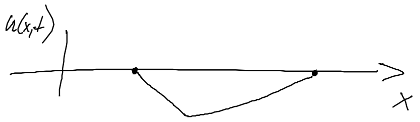
$$F(\underbrace{x, y}_{\text{mindestens 2 Variablen}}, z, \underbrace{z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}}_{\text{gemischte Ableitungen}}) = 0$$

$$z_x = \frac{\partial}{\partial x} z(x,y)$$

$$z_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} z(x,y)$$

VII.2. Schwingende Saite

Sei $u(x,t)$ die Auslenkung einer Saite als Funktion der Zeit und des Ortes.



$u(x,t_0)$ ist die Anfangsauslenkung

Es gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)$$

mit c : Schallgeschwindigkeit

zu bestimmen ist nun $u(x,t)$ für $t \geq 0$

Vorgegeben sind außerdem

$$u(x, t=0) = u_0(x) \quad \text{(Anfangsprofil für die Auslenkung)}$$
$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\Big|_{t=0} = v_0(x) \quad \text{(Anfangsprofil für die Geschwindigkeit)}$$

außerdem gelten die Randbedingungen:

$$u(x=0, t) = u(x=L, t) = 0$$

Lösungsansatz: <u>Separationsansatz</u>

$$u(x,t) = y(x)\, z(t)$$

Einsetzen:

$$y(x)\, z''(t) = c^2\, y''(x)\, z(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{z''(t)}{c^2 z(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)} = -k^2$$

linke Seite hängt also nur von t ab und rechte nur von x

Deswegen müssen beide Seiten konstant sein!

$\Rightarrow$ Jede dieser Gleichungen ist eine gewöhnliche lineare DGL 2. Ordnung mit Koeffizienten.

Eine mögliche Lösung für ein bestimmtes k kann sofort hingeschrieben werden:

$$y(x) = \alpha \cos(kx) + \beta \sin(kx)$$
$$z(t) = \gamma_1 \cos(kct) + \gamma_2 \sin(kct)$$

$\Rightarrow$ „eindimensionale Wellen"

Betrachtung der (räumlichen) Randbedingungen

$$u(x=0,t) = u(x=L,t) = 0 \quad \forall t$$

Aus dem Separationsansatz folgt $y(0) = y(L) = 0$

$$\Rightarrow \quad \alpha\cos(k0) + \underbrace{\beta\sin(k0)}_{=0} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0$$

und $$\alpha\cos(kL) + \underbrace{\beta\sin(kL)}_{} \stackrel{!}{=} 0$$

$$k = k_n = \frac{n\pi}{L} \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots$$

Es kommen also nur diskrete Werte für k vor

k entspricht hier dem Wellenvektor (hier ein Skalar)

Weil wir eine lineare partielle DGL betrachten, gilt das Superpositionsprinzip $\Rightarrow$ Die allgemeine Lösung hat die Form

$$u_n(x,t) = \beta\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(\gamma_1\cos(k_nct) + \gamma_2\sin(k_nct)\right)$$

Definiere neue Konstanten: $a_n = \beta\gamma_1$, $b_n = \beta\gamma_2$

$$\rightarrow u_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(a_n\cos(k_nct) + b_n\sin(k_nct)\right)$$

Damit ist die allgemeine Lösung:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(a_n\cos(k_nct) + b_n\sin(k_nct)\right)$$

Bestimmen der Koeffizienten a_n, b_n aus den Anfangsbedingungen:

(i) $u(x, t=0) = u_0(x)$

(ii) $\left.\frac{\partial}{\partial t}u(x, t=0)\right|_0 = v_0(x)$

aus (i) folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \stackrel{!}{=} u_0(x)$$

aus (ii) folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_nc\, b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \stackrel{!}{=} v_0(x)$$

Frage: Wie bestimmen wir daraus die Koeffizienten?

Es gilt nämlich: $\int_0^L dx \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) = \ldots$ neue Variablen: $u = \frac{\pi}{L}x$, $du = \frac{\pi}{L}dx$

$$= \frac{L}{\pi}\int_0^{\pi} du \sin(nu)\sin(mu) = \frac{L}{\pi}\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & \text{falls } n=m\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$$

$$= \frac{L}{2}\delta_{n,m} \quad \text{mit} \quad \delta_{n,m}\begin{cases}1 & \text{wenn } n=m\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Diese Orthogonalitätsrelation kann nun benutzt werden um (i) und (i) nach a_n und b_n aufzulösen.

aus (i): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = u_0(x)$

$$\Rightarrow \int_0^L dx \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\cdot\sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \int_0^L dx\, U_0(x)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{L}{2}\delta_{n,m} = \frac{L}{2}a_m = \int_0^L dx\, U_0(x)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

$$a_m = \frac{2}{L}\int_0^L dx\, U_0(x)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

analog mit b_n:

$$b_m = \frac{2}{L}\frac{1}{k_m C}\int_0^L dx\, V_0(x)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

$\Rightarrow$ Endgültige Lösung der partiellen DGL!

Mathematischer Einschub

Definition:

Die Fourier-Reihe einer Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[-L, L]$ ist definiert als unendliche Reihe der Form:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \right)$$

„Entwicklung in stehenden Wellen"

mit den reellen Koeffizienten a_n, b_n

Beachte: Es gilt wegen der Periodizität der sin- und cos-Funktionen

$$f(x+2L) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x + \frac{n\pi}{L} 2L\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x + \frac{n\pi}{L} 2L\right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = f(x)$$

Eine noch allgemeinere Definition der Fourierreihe ist:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i n \frac{\pi}{L} x}$$, wobei c_n jetzt komplex ist

Falls $f(x)$ reell ist, muss gelten dass $c_{-n} = c_n^*$, $c_0 =$ reell

denn dann folgt:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{i n \frac{\pi}{L} x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i n \frac{\pi}{L} x} + c_0$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-i n \frac{\pi}{L} x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i n \frac{\pi}{L} x} + c_0$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(c_n^* e^{-i n \frac{\pi}{L} x} + c_n e^{i n \frac{\pi}{L} x} \right)}_{\text{jeder Term ist reell weil } z + z^* = 2\,\mathrm{Re}(z)} + c_0$$

In allen Fällen können wir die Koeffizienten a_n, b_n, c_n durch Projektion bestimmen:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} dx\, f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} dx\, f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} dx\, f(x)\, e^{-i \frac{n\pi}{L} x}$$

Dies folgt aus den Orthogonalitätsrelationen:

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} dx \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L} x\right) = \delta_{n,m}$$

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} dx \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right) = \delta_{n,m}$$

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} dx \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L} x\right) = 0$$

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} dx\, e^{i \frac{n-m}{L} \pi x} = \delta_{n,m}$$

Wegen dieser Orthogonalität nennt man $\sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$, $\cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$ und $e^{i \frac{n\pi}{L} x}$ auch „Basisfunktionen" eines orthogonalen Funktionen-Systems.

<u>mathematischer Einschub (Nr. 2)</u>

Die hier eingeführten Funktionen $\cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$, $\sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$, $e^{i \frac{n\pi}{L} x}$ bilden einen Vektorraum!

Analog zu gewöhnlichen Vektoren / Vektorräumen:

i) Entwicklung

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \underbrace{e^{i \frac{n\pi}{L} x}}_{\text{Basisvektor}}$$

ii) Die Koeffizienten in der Entwicklung

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} dx\, f(x)\, e^{-i \frac{n\pi}{L} x}$$

Das entspricht im $\mathbb{R}^d$

$$\underline{y} = \sum_{n=1}^{d} y_n \underline{e}_n$$

$$y_n = \underline{e}_n \cdot \underline{y} = \sum_{n=1}^{d} e_{n,i} y_i = \langle e_n | y \rangle$$