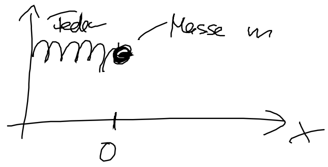
Wh: Wo kommen Systeme von DGLs vor?

a) Rückführung von DGLs zweiter Ordnung auf Systeme von DGLs erster Ordnung

Beispiel: Schwingung eines Massenpunktes.



Newton'sche BWGL

$$m\ddot{x}(t) = \underbrace{-Kx(t)}_{\text{"Federkraft" (Hook'sches Gesetz}}$$

(Begründung siehe letzte VL)

$$\Leftrightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx(t)$$

Impuls: $p = m\dot{x}(t)$, dann gilt:

1) $\dot{x}(t) = \frac{1}{m}p(t)$ Definition des Impulses

2) $\dot{p}(t) = -Kx(t)$ Newton'sche BWGL

- Beide DGLs sind erster Ordnung
- Die Gl. 1) und 2) sind gekoppelt (beide Gleichungen enthalten beide Variablen

Allgemein:

Sei $y''(x) = \frac{dy^2}{dx^2} = f(x, y, y')$ DGL zweiter Ordnung

Gesucht: $y(x)$, $y'(x)$

Führe ein: $y_1(x) = y(x)$

$y_2(x) = y'(x) = \frac{dy}{dx}$

Das System $\boxed{\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= f(x, y_1, y_2) \end{aligned}}$ heißt "zugehörige System" von DGLs erster Ordnung!

Beachte: Für eine eindeutige Lösung benötigt man jetzt zwei Anfangsbedingungen, nämlich

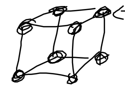
$y_0 = y(x_0)$ und $y'(x_0)$

b) Weitere Beispiele für Systeme aus DGL

– In der Mechanik vieler Massenpunkte

z.B. gekoppelte Schwingungen

Schwingung von Atomen in Festkörpern um die Gleichgewichtsposition



„Phononen" (Gitterschwingungen)

aufgrund von thermischer Fluktuation

Durch Wechselwirkung zw. der Atome kommt es zu einer Kopplung der Schwingungen $\Rightarrow$ System von DGLs

Elektrodynamik:

– Maxwell-Gleichungen

$$\underbrace{\underline{H}(\underline{r},t)}_{\text{Magnetfeld}} = \overset{\text{Konstant}}{\mu^{-1}}\, \underline{B}(\underline{r},t)\,, \quad \underbrace{\underline{D}(\underline{r},t)}_{\text{dielektr. Verschiebung}} = \overset{\text{Konstant}}{\varepsilon}\, \underline{E}(\underline{r},t)$$

es gilt: 1) $\nabla \times \underline{H} = \overset{\text{Strom}}{\underline{j}(\underline{r},t)} + \frac{\partial}{\partial t} \underline{D}(\underline{r},t)$ — Wirbel des Magnetfelds werden durch Ströme erzeugt

2) $\nabla \times \underline{E} + \frac{\partial \underline{B}(\underline{r},t)}{\partial t} = 0$ — „Induktionsgesetz" zeitl. Änderung des Magnetfeldes führt zu einem elektr. Feld

$\underline{B}$ und $\underline{E}$ bzw. $\underline{H}$ und $\underline{D}$ gehen in beide DGL's erster Ordnung ein!

$\Rightarrow$ gekoppeltes System!

Genauere Betrachtung von Systemen $\rightarrow$ später

II.4. Lineare DGL zweiter Ordnung

allgemein:

$$\boxed{y''(x) + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y = \underbrace{b(x)}_{\text{Inhomogenität}}}$$

Lösungsstrategie

ähnlich wie bei linearen DGL's erster Ordnung

i) Finde zunächst eine allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ($b=0$)

$$y(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

man sagt:

$\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ bilden ein "Fundamentalsystem"

(sie spannen den Lösungsraum auf)

ii) addieren darauf eine spezielle Lösg der inhomogenen Gl.

(z.B. dadurch, dass man zunächst in ein System von DGL's erster Ordnung umschreibt, dann Variation der Konstanten)

Wir betrachten als Beispiel den "harmonischen Oszillator mit Reibung"

("gedämpfter" harmonischer Oszillator)

Newton'sche BWGL

$$(*) \quad \boxed{m\ddot{x}(t) = \underbrace{-k\,x(t)}_{\text{Federkraft}} \underbrace{-\,\gamma\,\dot{x}(t)}_{\text{"Reibung" ("Dämpfung")}}}$$

also:

$y(x) \to x(t)$

$a_1(x) \Rightarrow \gamma = \text{const}$

$a_0(x) \to k = \text{const}$

hier: konstante Koeffizienten, keine Inhomogenität

Lösungsideen

- gehe gleich über zu System linearer DGL's erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten $\Longrightarrow$ später
- Starte gleich mit geeignetem Lösungsansatz $\Longleftarrow$ jetzt!

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

Einsetzen in (*)

$$m\lambda^2 e^{\lambda t} = -k e^{\lambda t} - \gamma\lambda e^{\lambda t} \qquad \Big| \cdot e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow \boxed{m\lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0} \qquad \text{„charakteristische Gleichung"}$$

quadratische Gleichung!

Lösung durch quadrat. Ergänzung

$$\lambda^2 + \frac{\gamma}{m}\lambda = -\frac{k}{m}$$

$$\lambda^2 + \frac{\gamma}{m}\lambda + \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 = -\frac{k}{m} + \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2$$

$$\left(\lambda + \frac{\gamma}{2m}\right)^2 = -\frac{k}{m} + \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2$$

$$(**) \quad \boxed{\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2m} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}}$$

Term unter der Wurzel verlangt genauere Betrachtung!

Es gilt:

Falls $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dann ist das Fundamentalsystem definiert durch $\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ und $\varphi_2(t) = e^{\lambda_2 (t)}$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung:

$$\boxed{x(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t)}$$

wobei c_1, c_2 durch Randbedingungen festgelegt werden können

Genauere Betrachtung der gedämpften Schwingung:

Fallunterscheidung

1) ungedämpfter Fall (reibungsfreier) $\gamma = 0$

aus (**) $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\underbrace{-\frac{k}{m}}_{\text{negativ}}}$!

Beachte: $m > 0$, $k > 0$

Komplexe Zahl $i^2 = -1$

umschreiben $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(-1)}$

$$= \pm \underbrace{\sqrt{\frac{k}{m}}}_{\text{positiv}} \underbrace{\sqrt{-1}}_{i} = \underbrace{\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}}_{\text{komplex}} = \pm i\omega$$

Notation: $\omega := \sqrt{\underbrace{\frac{k}{m}}_{\text{positiv}}}$

allgemeine Lösung

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$$

„harmonische Schwingung"

2) „starke Reibung"

γ positiv und so gross, dass $\underbrace{\frac{\gamma^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}_{} > 0$

Ausdruck unter der Wurzel in $(*)$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2m} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4m^2} - \underbrace{\frac{k}{m}}_{\text{positiv}}}$$

$\Rightarrow \lambda_{1,2}$ ist reell und negativ

allg. Lösung: $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$

$\Rightarrow$ exponentiell abklingend in der Zeit

Zur Wahl der Konstanten, falls feste Anfangsbedingungen vorgegeben sind
(das gilt für alle Fälle in der Fallunterscheidung)

$$x(t_0) \stackrel{!}{=} x_0 \quad , \quad \dot{x}(t_0) = v_0$$

$$x(t)\Big|_{t=t_0} = c_1 e^{\lambda_1 t_0} + c_2 e^{\lambda_2 t_0} \stackrel{!}{=} x_0$$

$$\dot{x}(t)\Big|_{t=t_0} = \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t_0} + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t_0} \stackrel{!}{=} v_0$$

Lineares Gleichungssystem für c_1, c_2

$$\left(\text{Lösung:} \quad c_1 = \frac{\lambda_2 x_0 - v_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t_0} \quad c_2 = \frac{\lambda_1 x_0 - v_0}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 t_0} \right)$$

3) „Schwache Reibung" (Misch-Fall)

$$\frac{\gamma^2}{4m^2} - \frac{k}{m} < 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2m} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{\gamma^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}_{\text{negativ!}}} = -\frac{\gamma}{2m} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2}}_{\text{positiv}}}\ \underbrace{\sqrt{-1}}_{i}$$

$$= \underbrace{-\frac{\gamma}{2m}}_{\text{reell}} \pm i\omega \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2}}$$

Allgemeine Lösung:

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{\gamma}{2m}t + i\omega t} + c_2 e^{-\frac{\gamma}{2m}t - i\omega t}$$

$$= \underbrace{e^{-\frac{\gamma}{2m}t}}_{\substack{\text{exponentiell} \\ \text{abklingend} \\ \text{"Dämpfung"}}} \left(\underbrace{c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}}_{} \right)$$

harmonische Schwingung wie im reibungsfreien Fall!

aber: ω ist kleiner als im Fall $\gamma = 0$

$\left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2}}\right)$

II.5 Lineare homogene Systeme aus DGL's erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Betrachte Systeme der Form:

$$y_1' = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3 + \dots + a_{1n} y_n$$
$$y_2' = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + a_{23} y_3 + \dots + a_{2n} y_n$$
$$\vdots$$
$$y_n' = a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \dots + a_{nn} y_n$$

mit $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$ Konstanten

$\Rightarrow$ Lineare, homogene, gekoppelte DGL's für n Funktionen $y_1(x), \dots, y_n(x)$

Beispiel: aus $y'' = f(x, y, y')$ $\Rightarrow$ $y_1' = y_2$, $y_2' = f(x, y_1, y_2)$ mit $y_1 = y$, $y_2 = y'$

Rückführung einer DGL 2. Ordnung

Neue Notation

Vektor $\underline{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$ n-dimensionaler Vektor

Matrix $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $n \times n$ Matrix

Das System von DGL's kann geschrieben werden als:

$$\boxed{y_\alpha'(x) = \sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\, y_\beta(x)}$$

Komponentenschreibweise

α-Komponente des Vektor $\underline{y}(x)$

$\alpha = 1, \dots, n$

$\alpha\beta$ – Element der Matrix $\underline{\underline{A}}$

oder kompakt:

$$\boxed{\underline{y}'(x) = \underline{\underline{A}}\, \underline{y}(x)}$$

Konstante Koeffiziente $\Longleftrightarrow$ $\underline{\underline{A}}$ enthält nur konstante Einträge

Bemerkung:

entsprechend wäre $\underline{y}'(x) = \underline{\underline{A}}\, \underline{y}(x) + \underline{b}(x)$ ein inhomogenes System

Lösungsansatz?

Erinnerung an den Fall $n=1$ $(y_1 \to y)$

$$y'(x) = a\, y(x)$$

$$\Rightarrow y(x) = c\, e^{ax} \quad \text{wie schon bekannt!}$$

$$= e^{ax} \cdot c$$

Für $n>1$ wählen wir entsprechenden Lösungsansatz

$$\underline{y}(x) = e^{\underline{\underline{A}} x} \underline{c}$$

mit $\underline{c}$ Konstanten Vektor, der durch (n) Anfangsbedingungen festgelegt werden kann

Dabei ist die Exponentialfunktion der Matrix wie folgt definiert.

$$e^{\underline{\underline{A}}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{(\underline{\underline{A}})^k}_{k\text{-faches Matrixprodukt}} \quad \text{Definition über Potenzreihe (Taylorreihe)}$$

$$= \frac{1}{0!}(\underline{\underline{A}})^0 + \frac{1}{1!}\underline{\underline{A}} + \frac{1}{2!}(\underline{\underline{A}})^2 + \ldots$$

$$= \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{A}} + (\underline{\underline{A}})^2 + \ldots$$

$\Rightarrow$ ergibt wieder eine Matrix!

entsprechend:

$$e^{\underline{\underline{A}} x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\underline{\underline{A}})^k x^k$$

Zeige nun, dass der Ansatz tatsächl. die DGL erfüllt:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\underline{\underline{A}} x} \underline{c} \right) = \frac{d}{dx}\left(e^{\underline{\underline{A}} x}\right) \underline{c}$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underline{\underline{A}}^k x^k \right) \underline{c}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underline{\underline{A}}^k \, k \, x^{k-1} \right) \underline{c}$$

Term mit $k=0$ trägt nicht bei!

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \underline{\underline{A}}^k x^{k-1} \right) \underline{c}$$

$$= \underline{\underline{A}} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \underline{\underline{A}}^{k-1} x^{k-1} \right)}_{e^{\underline{\underline{A}}x}} \underline{c}$$

$$\frac{d}{dx} \underline{y}(x) = \underline{\underline{A}} \, e^{\underline{\underline{A}}x} \underline{c} = \underline{\underline{A}} \, \underline{y}(x)$$

q.e.d