

Wn: Komplexe Zahlen

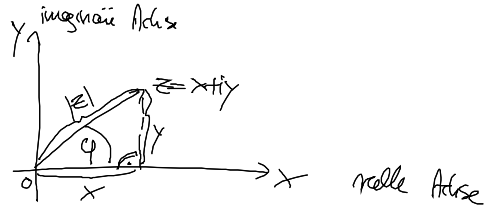
$$z = x + iy \quad \begin{array}{l} \text{Imaginärteil} \\ \text{Realteil} \end{array}$$

$$z = x + iy \quad \text{(kartesische Darstellung)}$$

$$i^2 = -1$$

$z = i$ ist die Wurzel aus der Gleichung $z^2 = -1$
($z = -i$)

Darstellung in der komplexen Ebene:



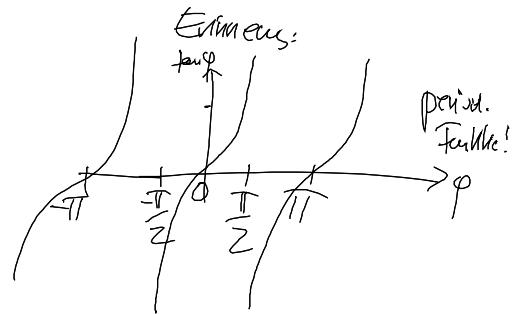
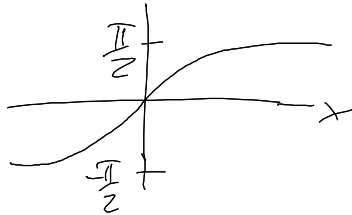
Polardarstellung:

$$z = \underbrace{|z|}_{\text{reelle Zahl}} e^{i\varphi}, \quad |z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{mit } z^* = z - iy$$

aus der Zeichnung: $\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{y}{x}$ (bzw. $x = |z| \cos \varphi$, $y = |z| \sin \varphi$)

$$\Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{falls } x \neq 0$$

Umkehrfkt. von \tan
dabei wird die Umkehrfkt. \arctan
auf das Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
eingeschränkt



Fallunterscheidung!

$$x=0, y>0: \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad x=0, y<0: \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

Polardarstellung: $z = |z| e^{i\varphi}$

für $|z|=1$ gilt $e^{i\varphi} = \underbrace{\cos \varphi}_x + i \underbrace{\sin \varphi}_y$

Kann man auch aus der Taylorreihe erhalten!

Formel von Moivre:

$$\begin{aligned} z^n &= (x+iy)^n = (|z|e^{i\varphi})^n = |z|^n (e^{i\varphi})^n \\ \text{n-te Potenz} & & & = |z|^n e^{in\varphi} \\ & & & = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \end{aligned}$$

speziell für $|z|=1 \rightarrow (\cos + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$

Wurzeln:

$z^n = z_0 \rightarrow z = z_0^{\frac{1}{n}}$ z heißt "n-te Wurzel" aus z_0

Beispiel: $z^n = 1$ ($z_0 = 1$)

benutze Formel von Moivre:

$$\begin{aligned} 1 &= e^{i2\pi k} \quad \text{mit } k=0,1,2,\dots \\ &= \underbrace{\cos 2\pi k}_1 + i \underbrace{\sin 2\pi k}_0 \\ \Rightarrow z^n &= e^{i2\pi k} \\ \Rightarrow z &= e^{i \frac{2\pi}{n} k} \end{aligned}$$

Lösung ist nicht eindeutig!

Wo sind komplexe Zahlen in der Physik wichtig?

Beschreibung von Schwingungen

$z(t) = r e^{i\omega t}$ ω Schwingungsfrequenz
 Zeit "harmonische Schwingung"

(Realteil: $x(t) = r \cos \omega t$
 $y(t) = r \sin \omega t$)

harmonische
 - Oszillatoren
 - Gitter Schwingungen

- Ebene Wellen (Ede übertragen!)
 Lösungen der Maxwellgleichungen im Vakuum: $\underline{E}(\underline{r}, t) \sim e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$
 Grundgleichung der Elektrodynamik \uparrow elektrische Feld

- Quantenmechanik:
 Wellenfunktion $\psi(\underline{r}, t)$
 Aufenthaltswahrscheinl. $|\psi(\underline{r}, t)|^2 = \psi \psi^*$

II. Gewöhnliche Differentialgleichungen

II.1. Motivation, Einführung

i) Dynamische Grundgleichungen in der Physik haben die Form von Differentialgleichungen!

Beispiele: Klass. Mechanik

- Newton'sche BWGL (Bewegungsgleichung) in einer Dimension

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) = F(t)$$

a(t) Kraft

Beispiel für gewöhnl. DGL (Differentialgleichung!)

enthält räumliche Ableitungen zweiter Ordnung

- Quantenmechanik: Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi(\underline{r}, t) \quad \text{mit} \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\underline{r})$$

mit $\psi = \psi(\underline{r}, t)$ und $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ Planck'sche Wirkungsquantum!

(in einer Dim: $\Delta \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}$)

Beispiel für partielle Differentialgleichung!

- Elektrodynamik:

$$\frac{\partial \underline{B}(\underline{r}, t)}{\partial t} = \nabla \times \underline{E}(\underline{r}, t)$$

Magnetfeld

"Rotation" enthält (erste) räumliche Ableitung!

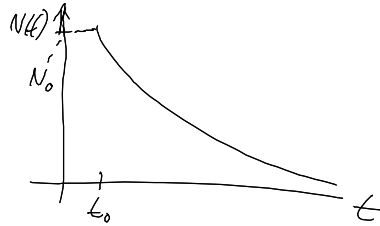
(i) Auch neben den Grundgeden interessiert man sich häufig für Gesetzmäßigkeiten ganzer Funktionen.

• z.B. radioaktiver Zerfall:

Wenige Atome eines zum Zeitpunkt t_0 aus N_0 Teilchen bestehenden radioaktiven Präparats sind bei einer Zeit $t > t_0$ noch da?

$$\text{es gilt: } \frac{dN(t)}{dt} = -\alpha N(t)$$

Lösung:
Exponentieller Abfall



• Teilchen Diffusion. Differentialrechnung / Laplace

$$\frac{\partial}{\partial t} C(x, t) = D \Delta C(x, t)$$

Konzentration

Klassifizierung von DGL's

• Ge wählteste DGL's: Beschreiben Funktionen einer Variablen (häufig Zeit t)
Beispiel Newtonsche BWG

• Partielle DGL's:
→ Für Funktionen mehrerer Variablen
„partiell“, falls sich die Ableitungen auf versch. Variablen beziehen!

• Ordnung der DGL:
höchste auftretende Ableitung
(Newton: ~~2~~ „Zter Ordnung“)

• Welche Unterscheidungsmerkmale:
- einzelne DGL oder gekoppelte System von DGL
- Linear oder nicht linear in der gesuchten Funktion
- Explizit oder implizit bezgl. der gesuchten Funktion

II.2. Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung

explizite Form: $y'(x) = f(x, y)$

$\frac{dy}{dx}$ / vorgegeben
 gesucht: die Funktion $y(x)$

(z.B.)

$$y'(x) = x^2 + 2 \sin(x y(x))$$

nicht linear!

Bemerkungen:

- (i) Falls nur f nur von x abhängt, d.h. $y'(x) = f(x) \Rightarrow$ "bekanntes Gelände"
 \Rightarrow Lösung aus einfacher Integration

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

Beispiel: $y'(x) = x^3 + \cos x$

$$\rightarrow y(x) = \frac{1}{4} x^4 + \sin x + C$$

Konstante C folgt aus den Anfangsbedingungen:

$$y(x_0) = y_0 = \frac{1}{4} x_0^4 + \sin x_0 + C$$

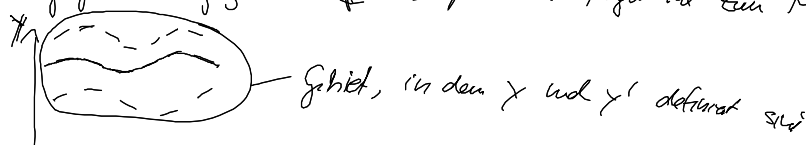
$$\Rightarrow C = y_0 - \frac{x_0^4}{4} - \sin x_0$$

- (ii) Sei nun f auch eine Funktion von $y(x)$

Geometrische Interpretation von $y'(x) = f(x, y)$

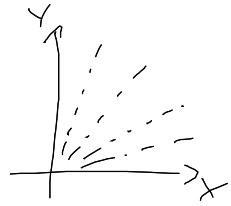
In jedem Punkt (x, y) wird durch $f(x, y)$ eine Steigung vorgegeben.
 Die Gesamtheit der Steigungen definiert ein "Richtungsfeld".

Die gesuchte Funktion $y(x)$ entspricht dann einer der Funktionen, die an jedem Punkt die vorgegebene Steigung hat ("Lösungen sind Tangential zum Richtungsfeld")



Im allgemeinen sind viele I.K. mit dem Richtungsfeld kompatibel!
 Teilgleichung erfolgt durch die Anfangsbedingung!

Beispiel: $y' = \frac{y}{x}$ (Lösungen) $y(x) = c \cdot x$



Auch hier wird c durch die Anfangsbedingung festgelegt. $y(x_0) = \overset{!}{=} y_0$
 denn: $y(x) = c = \frac{y}{x}$

II. 2.1. DGL mit getrennten Variablen

Form: $y'(x) = A(x, y)$
 $y'(x) = f(x) g(y)$ (*)

hier: A faktorisat bzgl. x und y
 (f und g beide stetig)

Lösungsstrategie

1) Suche Nullstellen der Funktion $g(y)$

\Rightarrow (Konstante) y_1, y_2, y_3, \dots

Abkürz., diese Konstante sind Null:

$\Rightarrow \left. \begin{matrix} A=0 \\ y'=0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{DGL erfüllt!}$

2) Nehme nun an, dass $g(y) \neq 0$

Schreibe (*) um:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x) g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x) dx$$

Integrieren auf beide Seiten:

„Trennung der Variablen“

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int dx' f(x') + \text{const}$$

muss wieder entsprechend der Anfangsbedingung gewählt werden

Kann man so realisieren:

$$\int_{y_0}^y \frac{dy'}{g(y')} = \int_{x_0}^x f(x') dx' \quad (**)$$

mit Anfangsbed. $y(x_0) = \overset{!}{=} y_0$

Anders ausgedrückt: ("Kodenzepf")

Sei $F(x)$ die Stammfunktion von $f(x)$

Sei $\Phi(y)$ " " " $\frac{1}{g(y)}$

Dann folgt aus (**)

$$\Phi(y) - \Phi(y_0) = F(x) - F(x_0)$$

$$\Rightarrow \Phi(y) = F(x) + C \quad \text{mit } C = \Phi(y_0) - F(x_0)$$

$$\Rightarrow y(x) = \Phi^{-1}(F(x) + C)$$

Beispiel

① $y'(x) = (y(x))^2$ Anfangswert: $y(x_0) = y(0) = y_0$ mit $x_0 > 0$
 $x_0 = 0$

hier: $f(x) = 1$, $g(y) = y^2$ ($\Rightarrow \frac{1}{g} = \frac{1}{y^2}$)

Stammfunktion $F(x) = x$

$$\Phi(y) = -\frac{1}{y}$$

Integrationskonstante: $C = \Phi(y_0) - F(x_0)$ ($x_0 = 0$)
 $= -\frac{1}{y_0}$

\Rightarrow Umkehrfunktion von Φ :

$$\Phi^{-1}(y) = -\frac{1}{y} = \Phi(y)$$

deun: $\Phi^{-1}(\Phi(y)) = -\frac{1}{(-\frac{1}{y})} = y$ ✓

$$\Rightarrow y = \Phi^{-1}(F(x) + C) = \frac{y_0}{1 - y_0 x}$$

Alternativ: direkter Weg:

$$\int_{y_0}^y \frac{dy'}{y'^2} = \int_0^x dx' \cdot 1 = x$$

$$\left[-\frac{1}{y'} \right]_{y_0}^y = x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y} = x \quad | \cdot y$$

$$\frac{y}{y_0} - 1 = xy \Rightarrow \frac{y}{y_0} = yx + 1 \Rightarrow y = \frac{y_0}{1 - y_0 x}$$

② $y'(x) = \underbrace{e^y}_{g(y)} \underbrace{\sin x}_{f(x)} \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0$

Stammfunkt.: $F(x) = -\cos x$

$$\Phi(y) = \int \frac{1}{g(y)} dy' = -e^{-y} \Rightarrow \Phi^{-1} = -\ln(-y)$$

direkt:

$$\int_{y_0}^y dy' e^{-y'} = \int_{x_0}^x dx' \sin x'$$

$$\Rightarrow -e^{-y} + e^{-y_0} = -\cos x + \cos x_0$$

$$\Rightarrow e^{-y} = \cos x - C \quad \text{wobei} \quad C = \cos x_0 - e^{-y_0}$$

$$-y = \ln(\cos x - C)$$

$$y = -\ln(\cos x - C)$$