

Nachklausur: Do 20.07. 8:00 EW 202

V.4. Die Divergenz:

geg.: Vektorfeld $\underline{A}(\underline{x}) \rightarrow$ Definition der Divergenz:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{A}(\underline{x}) &= \nabla \cdot \underline{A}(\underline{x}) \\ &= \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x(\underline{x}) \\ A_y(\underline{x}) \\ A_z(\underline{x}) \end{pmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned}$$

\Rightarrow Die Divergenz macht aus einem Vektorfeld eine skalare Größe!

Einige Rechenregeln:

• $\operatorname{div} \underline{A} = 0$ falls $\underline{A} = \text{const.}$

• $\operatorname{div} \underline{1} = 1 + 1 + 1 = 3.$

$$\nabla \cdot (\nabla \varphi) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial\varphi/\partial x \\ \partial\varphi/\partial y \\ \partial\varphi/\partial z \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} =: \Delta \varphi$$

$$\text{mit } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{"Laplace-Operator"}$$

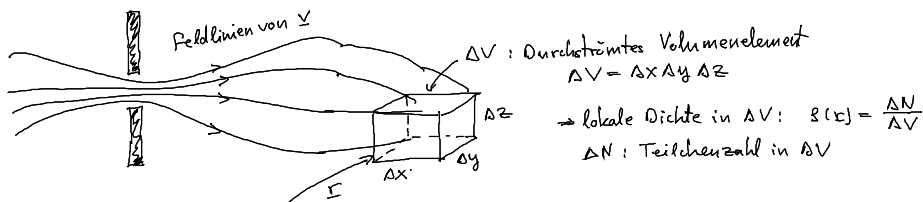
Interpretation der Divergenz:

Betrachte als Beispiel die Strömung einer Flüssigkeit. Definiere "Stromdichte":

$$\underline{j} = s(\underline{x}) \underline{v}(\underline{x})$$

$s(\underline{x})$: lokale Massendichte

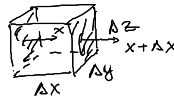
$\underline{v}(\underline{x})$: Geschwindigkeitsprofil



Frage: Wie ändert sich $s(\underline{x})$ in ΔV in der Zeit?

Bemerkung: Solange sich s überhaupt in der Zeit ändert, spricht man von einer nicht-stationären Strömung.

$$\dot{j}_x = S(x) v_x(x) = \frac{\Delta N}{\Delta V} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta N}{\Delta y \Delta z \Delta t}$$



\dot{j}_x entspricht der Teilchenzahl die pro Zeiteinheit Δt das Flächenelement $\Delta F = \Delta y \Delta z$ senkrecht zur x -Richtung durchströmen

⇒ Analog für \dot{j}_y, \dot{j}_z

⇒ Zeitliche Änderung von ΔN in ΔV (Bilanzgleichung):

$$\begin{aligned} \frac{\Delta N}{\Delta t} &= \underbrace{\dot{j}_x(x, y, z) \Delta y \Delta z}_{\text{Zufluss in } x\text{-Richtung}} - \underbrace{\dot{j}_x(x + \Delta x, y, z) \Delta y \Delta z}_{\text{Abfluss in } x\text{-Richtung}} \\ &+ \dot{j}_y(x, y, z) \Delta x \Delta z - \dot{j}_y(x, y + \Delta y, z) \Delta x \Delta z \\ &+ \dot{j}_z(x, y, z) \Delta x \Delta y - \dot{j}_z(x, y, z + \Delta z) \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

Beide Seiten durch ΔV teilen:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta N}{\Delta V \Delta t} &= \frac{\dot{j}_x(x, y, z) - \dot{j}_x(x + \Delta x, y, z)}{\Delta x} & \Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t \rightarrow 0 \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\dot{j}_y(x, y, z) - \dot{j}_y(x, y + \Delta y, z)}{\Delta y} \\ &+ \frac{\dot{j}_z(x, y, z) - \dot{j}_z(x, y, z + \Delta z)}{\Delta z} \end{aligned}$$

Bemerkung: $\frac{f(x) - f(x + \Delta x)}{\Delta x} = - \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} - \frac{\partial f}{\partial x}$

Also:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \dot{j}_x(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial y} \dot{j}_y(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial z} \dot{j}_z(x, y, z)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \nabla \cdot \vec{j}} \quad \text{"Kontinuitätsgleichung"}$$

Interpretation: Die Teilchenzahl (Dichte) in einem Volumenelement kann sich nur durch einen Zu- und Abstrom von Teilchen durch die Außenflächen ändern \Leftrightarrow "Teilchenzahlerhaltung"

Ähnliche Gleichung in Elektrodynamik und Quantenphysik.

Folgerungen!

- $\nabla \cdot \vec{j} > 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} < 0 \Rightarrow$ Es fließt mehr raus als rein. Man sagt: \vec{j} hat eine "Quelle"
 - $\nabla \cdot \vec{j} < 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} > 0 \Rightarrow \vec{j}$ hat eine "Senke".
- ⇒ Divergenz misst lokale "Quellenstärke".

V. S. Rotation eines Vektorfelds:

$$\begin{aligned} \text{Definition: } \text{rot } \vec{A}(r) &= \nabla \times \vec{A}(r) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z \end{aligned}$$

Bemerkung: $\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \dots$

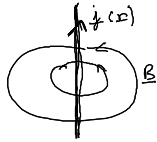
Interpretation:

rot misst die lokale Wirbelstärke!

Beispiel:

Stromdurchflossener Leiter
mit Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$

→ Erzeugt kreisförmiges
Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$



Es gilt:

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \quad (\text{Magnetostatik})$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} = 1.2566 \dots \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$$

Man kann zeigen, dass:

$$\nabla \times \nabla \varphi = 0 \quad \Rightarrow \text{Rotation eines Gradientenfeldes verschwindet!}$$

↑
Gradient

z.B. für x-Komponente:

$$(\nabla \times \nabla \varphi)_x = \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \varphi)_z - \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \varphi)_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} = 0$$

Physikalische Konsequenzen:

• Konservative Kräfte sind wirbelfrei!

$$\underline{F} \text{ konservativ} \Leftrightarrow \underline{F} = -\nabla \phi(\vec{r})$$

• Elektrostatik: $\underline{E} = -\nabla \varphi(\vec{r}) \Rightarrow \nabla \times \underline{E} = 0 \Rightarrow$ im statischen Fall keine Wirbel
(nicht gültig in der Dynamik:
 $\nabla \times \underline{E} = -\dot{\underline{B}}$)

• $\nabla \cdot (\nabla \times \underline{A}) = 0$ (div rot $\underline{A} = 0$) \Rightarrow Wirbelfelder haben keine Quellen!

Bsp. (Magnetostatik): $\underline{B} = \nabla \times \underline{A} \Rightarrow \nabla \cdot \underline{B} = 0$

\Rightarrow keine magnetischen "Monopole"!